

令和2年度卒業論文
恒星黒点の形成過程に対する星表面磁場の影響

柴田健吾

大阪大学理学部物理学科 宇宙進化グループ

共同研究者 高棹真介

指導教員 長峯健太郎

2021年3月1日

概要

恒星黒点の形成過程を探ることはダイナモ機構を理解するための重要なステップである。黒点は太陽以外の恒星でも存在することが確認されているが、太陽と同じように黒点を形成するのかについては十分理解されていない。実際、太陽よりも遥かに磁気活動性の高い太陽型星では黒点の現れ方に違いが見られることが観測で報告されている。違いを生じる要因は星内部における熱対流や磁場増幅場所の違い、星表面の磁場による黒点成長の抑制などが考えられており、この違いを明らかにすることは恒星一般の磁気活動性の理解を進めることになる。本研究では、この中で星表面磁場が黒点に与える影響に着目し、Athena++ コードを用いた磁気流体シミュレーションを実施することによって、星表面磁場が磁束管浮上率に与える影響を評価することを試みた。この結果、300G 以下の星表面磁場では磁束管の浮上率に大きな影響を及ぼさないものの、400G を超えると磁束管の浮上率を著しく減少させることを確認した。

目次

第 1 章	研究の背景	3
1.1	黒点とは	3
1.2	恒星の黒点	5
1.3	黒点の磁束量と磁束量増加率の相関に関する議論	6
1.4	本研究のモチベーション	7
第 2 章	研究の手法	8
2.1	シミュレーションの設定	8
2.2	基礎方程式	10
2.3	初期条件	14
2.4	境界条件	18
第 3 章	結果	20
3.1	モデル 1 (熱対流が起こらない) の結果	20
3.2	モデル 2 (熱対流が起こる) の結果	25
第 4 章	議論・展望	28
4.1	モデル 1 (熱対流が起こらない) のシミュレーションの考察	28
4.2	まとめ・今後の課題	30
付録 A	Riemann Solver	34
A.1	Riemann 問題	34
A.2	Riemann Solver	38
A.3	HLL 法	41

第 1 章

研究の背景

1.1 黒点とは

太陽の表面に時折出現する直径数万 km 程度の黒い斑点を「黒点」と呼ぶ。黒点は図 1.1 のように濃さの異なる 2 つの領域をもっており、黒点の中の特に暗い部分を暗部、暗部を取り巻くやや暗い部分を半暗部と呼ぶ。黒点は太陽磁場の活動によって形成される構造であり、黒点内の光球磁場は 2,000G から 3,000 G と、周囲に比べて千倍以上強力な磁場が存在する。黒点が黒く見えるのも、後述するように磁場の影響である。

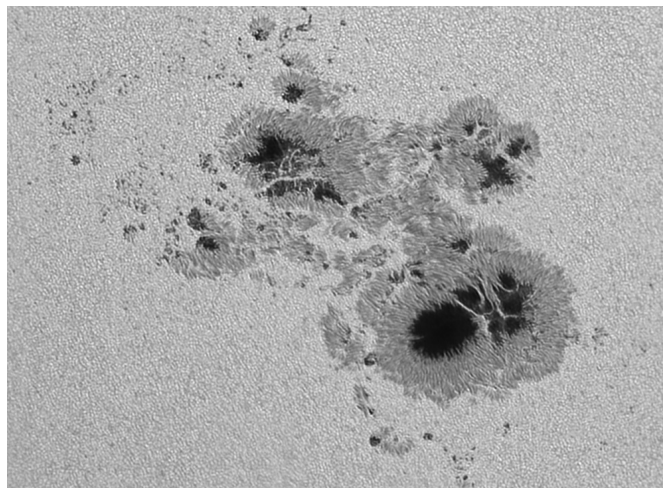


図 1.1 白色光によって撮影された太陽黒点 (SKY TELESCOPE)

太陽黒点の形成については、Parker(1955,1979)[10][9] および Zwaan(1987)[18] らによる先行研究により、大枠は次のように理解されている。まず太陽のダイナモ活動により、太陽内部の領域である対流層に磁束管が形成される。次に、その磁束管が対流・磁気浮力等の効果を受けて浮上する。浮上した磁束管が光球表面を飛び出したとき、その通過面では強い磁場のため内部からのエネルギー注入が妨げられ、温度が低くなる。そのため光球の磁束管通過面では黒体放射が周囲と比べて相対的に弱くなり、黒い点のように見えることになる。

黒点の形成は、それ自体で完結するような現象ではなく、フレアなどの爆発現象にも影響を与える。フレアは磁気エネルギーがプラズマの熱・運動エネルギーや非熱的な粒子のエネルギーに急速に転換される現象であると理解されており、そのため強い磁場を持つ黒点近傍ではフレアが発生しやすい。さらに、サイズの大きな黒点であればあるほど、その近傍でより高エネルギーのフレアが発生しやすいことが報告されている。例えば図 1.2 (shibata et al. 2013[11]) は横軸に黒点の面積、縦軸にその黒点近傍で起きたフレアのエネルギーをプロットした図である。図を見ると分かるように、黒点の大きさとフレアのエネルギーには正の相関がある。

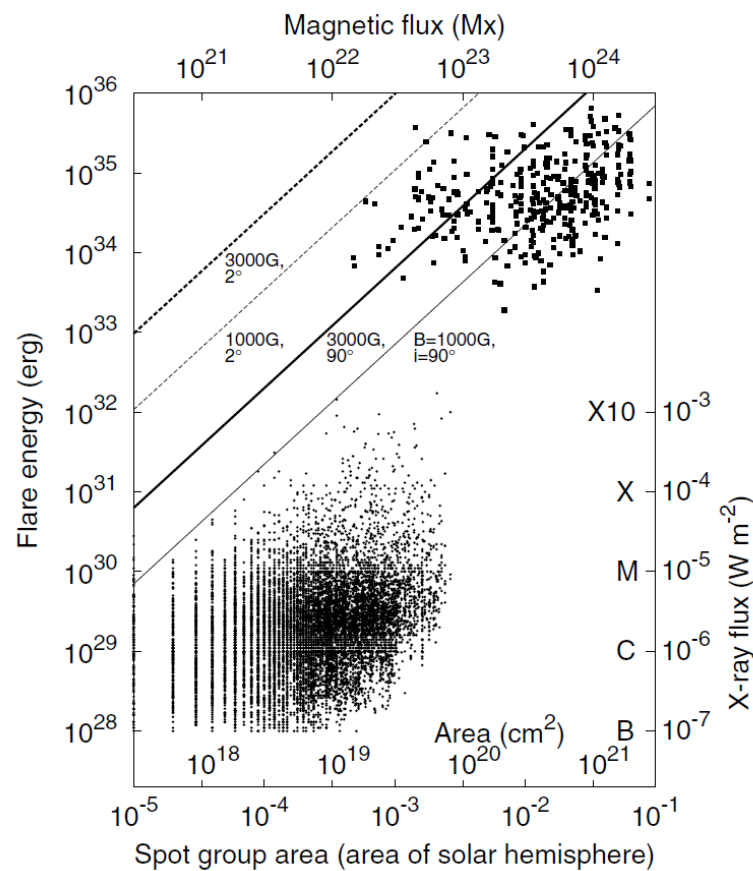


図 1.2 観測されたフレアに対し、近傍の黒点サイズとフレアのエネルギーの関係プロットした図 (shibata et al. 2013[11])。四角い点は太陽型恒星で発生したスーパーフレア (Maehara et al. 2012) を表し、丸い点は太陽で観測されたフレア (Sammis et al. 2000 と T.T.Ishii et al. 2012) を表す。図中の直線は観測データから予想される線を表し、角度 i は恒星の自転軸と地球にいる観測者の視線方向のなす角を表す。

このように、黒点は様々な他の物理現象と密接に関連し合っており、そのため黒点の研究は太陽の活動や周囲の惑星に与える影響などを議論する上で重要である。

1.2 恒星の黒点

黒点の形成は太陽に限定された現象ではなく、一般の太陽型星にも存在する (Berdyugina, et al. 2005[2])。ここで言う太陽型星とは、スペクトル型が F,G,K,M の主系列星を指すものとする。太陽以外の太陽型星の黒点は、その星の明るさの変動を観測することによってその存在を確かめることができる。恒星も太陽と同様に自転をしていると考えられるが、もし恒星表面に大きな黒点が存在する場合、恒星の明るさは準周期的に変化することになる。図 1.3 は太陽型星の明るさの準周期的な変化の一例である。図中にプロットされている丸い点は極小値を表し、これらは黒点に由来するものだと考えられる。なお、この恒星には大きな黒点が 2 つ存在すると考えられ、塗りつぶした丸と白抜き丸で区別している。本論文では詳細に述べるつもりはないが、このような準周期的な明るさの変動から恒星の黒点のサイズ・寿命などを推定することができる。もちろん、恒星の明るさが変化する原因は黒点だけではなく、脈動や惑星の通過など様々な要因が挙げられるが、うまく原因を選別する手法が考えられている。また、常にできるわけではないものの、ゼーマン効果によるスペクトル線の分裂を観測することにより、黒点の磁場の強さを測定することもできる (Strassmeier & Klaus, 2009[13])。

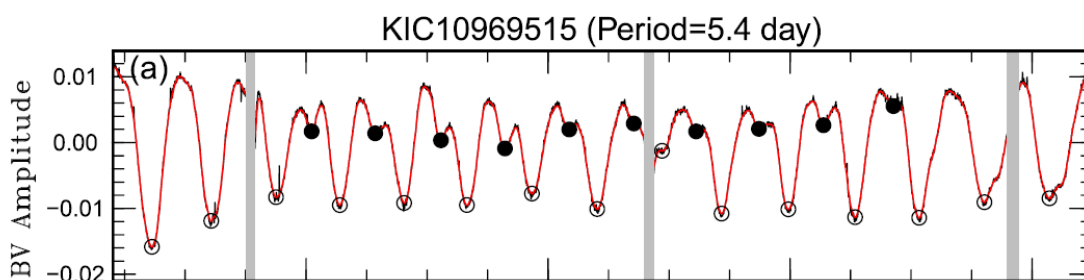


図 1.3 Kepler 宇宙望遠鏡によって観測された太陽型星の準周期的な明るさ変動の例 (Namekata et al. 2019[5])。横軸は時間を表し、左端が 2012 年 3 月 14 日を表し、1 メモリ右に進むごとに 5 日経過する。黒い曲線 (ほとんど赤い曲線に隠れてしまっている) は観測データを表し、その上に描かれた赤い曲線は観測値に合うようフィットした曲線を表す。グレーの縦のラインは 5 時間以上の観測ギャップがある箇所を表し、引用論文ではこの近傍のデータは解析に使用していない。

一般の太陽型星における黒点形成を研究することは次の点で重要である。恒星物理学の重要な未解決問題の 1 つに、ダイナモ機構がある。ダイナモとは、太陽などの天体が内部の流体運動によって大規模な磁場を生成・維持する働き (Brandenburg et al. 2005[3]) であり、基礎物理学の観点からも注目度が高く、解明が待ち望まれている。ダイナモは恒星内部の物理であるため、日震学による太陽内部の研究 (Asplund et al. 2009[1]) を通じてアプローチされているが、その一方で黒点などの恒星表面で起こる現象のデータを大量に集めるという統計的なアプローチもなされている。ここでもし太陽の黒点だけを見ていた場合、11 年という長い太陽活動の周期のためサンプルの数は

かなり絞られてしまう。したがって太陽黒点のみならず、太陽以外の黒点のデータも集めることが重要である。そのため、現在は太陽に限らない一般の太陽型星における黒点を研究する重要性が高まっている。

1.3 黒点の磁束量と磁束量増加率の相関に関する議論

太陽以外の恒星において、太陽と同じように黒点が形成されるのかということについてはよく分かっていない。実際、太陽よりも遥かに磁気活動性の高い太陽型星では黒点の現れ方に違いが見られることが観測で報告されている。

図 1.4 は観測された太陽および太陽型星の黒点における、最大磁束量 Φ_{\max} と磁束量増加率 $\frac{d\Phi}{dt}$ の関係を表した図 (Namekata et al. 2020[5]) である。ここで黒点の最大磁束量は、黒点が十分に発達した際に、黒点内の磁束密度を 2,000G と仮定し黒点の面積をかけることによって求めている。また磁束量増加率は、仮定した磁束密度 2,000G と黒点の面積の増加率をかけて求めている。すなわち、最大磁束量は黒点の面積、磁束量増加率は黒点の成長速度と読み替えても良いだろう。

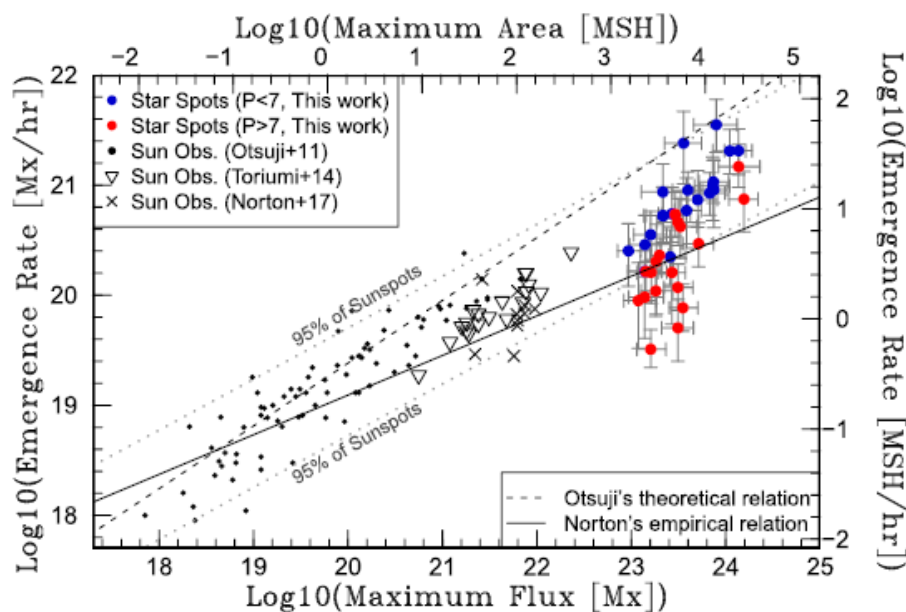


図 1.4 観測された太陽および太陽型星の黒点における、最大磁束量と磁束量増加率の関係 (Namekata et al. 2020[5])。黒い丸、三角、バツの記号でプロットされた点は太陽黒点を表し、赤または青の丸点は太陽型星の黒点を表す。丸点の色は自転周期 P が 7 日より短いか長いかの区別を表す。図中の薄い 2 つの点線は、太陽黒点の 95 パーセントが収まるラインを表す。図中の実線は Norton(2017)[6] による観測フィッティング、破線は Otsuji(2011)[8] による理論線を表す。

図 1.4 を見ると、全体的に最大磁束量大きい黒点ほど磁束量増加率大きいことが分かる。ここで、最大磁束量と磁束量増加率がどのような関係式で結ばれているかを探ることは興味の対象

である。太陽黒点だけに着目すると、図 1.4 の中でおよそ一直線上に並んでいることが分かる。両対数グラフで直線の関係にあるということは、磁束量増加率は最大磁束量のべき乗で表されると言える。Otsuji(2011)[8] は理論的に $\frac{d\Phi}{dt} \propto \Phi_{\max}^{0.5}$ という関係式を導出した (図の破線)。また Norton(2017)[6] は太陽黒点の観測データをフィッティングすることにより、 $\frac{d\Phi}{dt} \propto \Phi_{\max}^{0.3}$ という関係式を経験的に出した (図の実線)。これら 2 つの直線は太陽黒点の観測データに合致するようフィッティングされているが、太陽型星の黒点ではどちらの直線に対しても合致しているとは言い難い。

また、図 1.4 中には太陽黒点の 95% が含まれるような 2 本の点線が書かれているが、いくつかの太陽型星の黒点はこの領域をはみ出している。特に、自転速度が遅い (周期が 7 日以上) 恒星ほど領域をはみだす傾向がある。太陽の自転周期は約 30 日であり、図 1.4 では自転の遅い星 (赤丸) に分類されるので、自転が遅い星ほど太陽黒点とずれが見られるのは特筆すべきことである。つまり、太陽と他の太陽型星の間で、何かが違うがために黒点の磁束量増加率に違いが生じるということである。この違いを生む要因としては、星内部における熱対流や磁場増幅場所の違い、星表面の磁場による黒点成長の抑制 (Namekata et al. 2019[5]) などが考えられているが、何が支配的な要因であるかはよく分かっていない。

1.4 本研究のモチベーション

前節で述べた違いについて、Namekata et al.(2019)[5] は、星表面が強い磁場で満たされている場合には磁束管の浮上が妨げられる可能性があるということを述べている。例えば強い星表面磁場があると、磁気圧によって磁束管の浮上が妨げられる。磁束管の浮上が妨げられると、当然黒点の磁束量増加率は低下する。これに加え、我々は「磁場の打ち消し合い」も起こるのではないかと考えた。星表面に存在する磁力線が磁束管の磁力線と打ち消し合い、磁場が弱まるため、これも磁束量増加率に影響を及ぼすのではないかと予想できる。

星表面の磁場、より一般に恒星がもつ背景磁場の強さは星によって大きく異なる。太陽の背景磁場は 1G 程度である一方、磁場活動性の高い太陽型星では 100G 以上になることが知られており (Notsu et al. 2019[7], Takasao et al. 2020[15])、背景磁場は太陽と他の太陽型星を分かち重要な要因であると考えられる。背景磁場の浮上磁場に対する影響は、太陽物理の中では彩層・コロナジェット形成の文脈で活発に議論されてきた (Yokoyama & Shibata 1996, Pariat et al. 2009, Takasao et al. 2013) が、黒点の成長率に対する文脈で体系的な調査はなされていない。

したがって、恒星の背景磁場が黒点の成長に与える影響を調べることは先述の問題への重要なアプローチである。また、前節で述べた違いを生む要因として背景磁場の他にも対流速度の違いが挙げられると述べたが、星の背景磁場の影響を評価することは同時に他の恒星の対流速度に制限を与えることでもあるから、この観点からも恒星物理の理解のために重要な仕事であると言える。

このような研究背景から、著者は恒星の背景磁場が黒点の磁束量増加率に与える影響を調べるため、異なる強さの背景磁場中で磁束管を浮上させるシミュレーションを実施した。

第 2 章

研究の手法

本研究では、太陽型星の背景磁場が黒点の磁束量増加率に与える影響を定量的に議論するため、コンピュータを用いた磁気流体シミュレーションにより、磁束管が出現してから浮上するまでの様子を再現する。なお、本シミュレーションはあくまで磁束管の浮上に着目したシミュレーションであり、暗部や半暗部といった輻射輸送の結果として生じる黒点構造まで再現するようなものではなく、黒点形成を厳密に模したものではないということをあらかじめ断っておく。シミュレーションには公開コード Athena++ [12] を用いる。Athena++ は有限体積法の一つである Riemann Solver を主軸にしたグリッドベースの磁気流体シミュレーションコードで、宇宙物理学の多様な問題に応用しやすいように設計されている。Riemann Solver の詳しい説明は付録 A に譲ることとし、本章ではシミュレーションの初期条件、境界条件、用いるパラメータについて説明する。

2.1 シミュレーションの設定

本シミュレーションでは、強い背景磁場をもつ太陽型星を考える。強い背景磁場をもつ星では、例えば図 2.1 のように星周囲に磁場が分布しているとして、この磁場が刺さっている星表面のあたり（図 2.1 の赤枠で囲った部分）を計算領域とする。この位置では、背景磁場の磁力線は星表面に垂直であり、かつ一様であるとみなせる。図 2.1 では双極子磁場をもつ様子が描かれているが、より一般的な大局的な磁場構造を持っているとしても、十分星表面に近い領域に着目すれば、今仮定したように背景磁場を一様な磁場とみなして計算することができる。

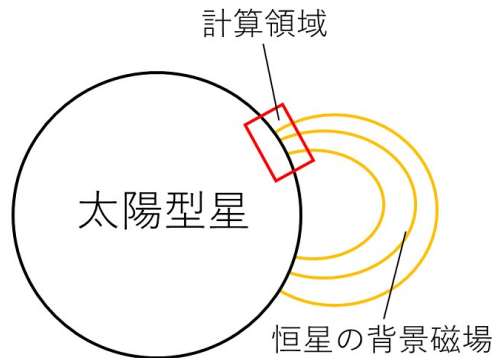


図 2.1 シミュレーション領域を示した図

次に、計算領域の設定について述べる。図 2.2 のような 2 次元の直交座標系のボックスを考え、図の通りに x, y 軸を設定する。ここで、 y 軸は恒星表面に垂直で、重力加速度は y 軸の負の向きにかかっているとす。本シミュレーションでは、磁束管は計算領域の平面に対し垂直であると仮定し、その断面の直径を 2,100km とした。また磁束管の磁束密度は 2,000G とした。磁束管の直径や磁束密度は小さめの太陽黒点の値を参考にして与えた。このとき磁束量は 10^{18}Mx のオーダーであり、これは一般的な太陽の磁束管の磁束量 (10^{19} から 10^{22}Mx) と比較すると小さいが、図 1.4 を見ると分かるように 10^{18}Mx のオーダーの太陽黒点も観測されており、与えた磁束量は現実と大きく乖離するものではないことを断っておく。計算領域の大きさは、この磁束管が十分入るよう、 $14,000 \text{km} \times 4,900 \text{km}$ とした ($[-7,000 \text{km}, +7,000 \text{km}] \times [-4,200 \text{km}, +700 \text{km}]$)。また、メッシュ数については 960×400 とした。このとき、1 セルの大きさは $14.6 \text{km} \times 12.3 \text{km}$ であり、一辺の長さは光球におけるスケールハイト (73.6km 程度) よりも十分小さい。ここでスケールハイトとは、星の大気において、ある高度から距離 H だけ上昇したときに大気の圧力が $\frac{1}{e}$ になるような H のことである。

恒星内部の構造は太陽のものと同じであると仮定し、シミュレーションでは対流層に加え光球と彩層下部を含んだ領域を計算する。対流層は対流によってエネルギー輸送が行われている領域であり、光球は光学的厚さが 1 程度になり放射冷却によるエネルギー損失が発生する領域である。本シミュレーションでは光球と対流層の境界を基準 $y = 0$ にとり、光球以上の領域の厚みは 700km、対流層は深さ 4,200km とした。

背景磁場は恒星表面に垂直であると仮定し、 y 軸の正の方向に一定の強さの磁場を与えた。この背景磁場の強さをパラメータとし、これを変化させたときに磁束管の浮上の仕方がどう変わるかを調べる。なお、磁束管が浮上する要因は浮力と熱対流の 2 種類があるが、本研究では熱対流の有無による磁束管浮上への影響を調べるため、まず熱対流がない設定で計算し、次に熱対流を含めた設定で計算した。便宜のため、前者の設定を「モデル 1」、後者の設定を「モデル 2」と呼ぶことにする。

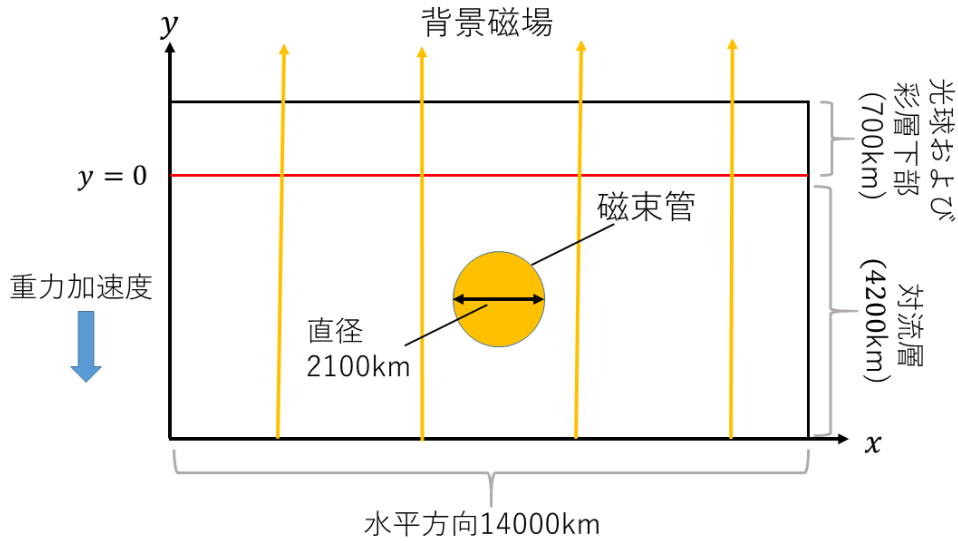


図 2.2 シミュレーションの概形図

2.2 基礎方程式

2.2.1 次元量における方程式

本シミュレーションで解かれる基礎方程式は以下である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho v_i v_j + \delta_{ij} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{B_i B_j}{4\pi} + \Pi_{ij} \right) = \rho g_i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left((E + p) v_i - \frac{B_i}{4\pi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + v_j \Pi_{ij} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \Lambda + \Gamma \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.4)$$

$$p = \frac{\rho R T}{\mu} \quad (2.5)$$

ここで、 ρ はガスの質量密度、 p はガスの圧力、 \mathbf{v} はガスの速度、 T はガスの温度、 \mathbf{B} は磁場ベクトルを表し、これらはそれぞれ座標と時間を引数とする関数である。また、 \mathbf{g} は重力加速度、 γ は比熱比、 κ はガスの熱伝導率、 μ はガスの平均分子量、 R は気体定数を表す。 E は単位体積あたりのエネルギーを表し、

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} \quad (2.6)$$

と与えられる。 Π_{ij} は粘性ストレステンソルを表し、

$$\Pi_{ij} = \rho\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

と与えられる。ここで ν は運動学的粘性率である。さらに、 Λ, Γ はそれぞれ、放射による冷却、地下からの加熱を表す。 Λ, Γ の具体形に関しては後述する。また、重力加速度 \mathbf{g} は高さ y に依存する関数だが、この具体形に関しても後述する。

各方程式の意味について簡潔に述べる。(2.1)は連続の式である。(2.2)は磁気流体の運動方程式である。ただし、粘性項では体積粘性率を無視している。(2.3)はエネルギー保存則の式である。(2.4)はガスの電気伝導率を無限大と仮定した際に導かれる磁場の誘導方程式である。(2.5)は理想気体のガスの状態方程式である。

2.2.2 物理量の規格化

宇宙のような大きなスケールのシミュレーションを行う場合、しばしば取り扱う値が大きくなるため、各物理量をその系における典型値で割り、1に近い無次元量を作ってから計算を行った方が便利である。以下では物理量 X に対して、その典型値を X_0 、無次元化した量を X_* で表す。すなわち、 $X = X_0 X_*$ の関係がある。

物理量を無次元化する際は、方程式が簡単になるようにうまく典型値を選ぶことが重要である。CGS ガウス単位系の基本次元は3つであるから、3つの物理量の典型値を任意に決めた後は、他の物理量は式が簡単になるように選ばばよい。本シミュレーションでは、太陽光球のスケールハイト、密度、温度の値を参考にして、長さ、質量密度、温度の典型値をまず決定し、残りの物理量の典型値は以下の表の通りに選んだ。ここで、気体定数を $R = 8.31 \times 10^7 [\text{erg mol}^{-1} \text{K}^{-1}]$ 、平均分子量を $\mu = 2.60 [\text{g mol}^{-1}]$ として計算した。

表 2.1 物理量の規格化

物理量	典型値の選び方	値
長さ	x_0	7.00×10^6 [cm]
質量密度	ρ_0	3.00×10^{-7} [g cm $^{-3}$]
温度	T_0	5500 [K]
速さ	$v_0 = c_{\text{iso},0} \equiv \sqrt{\frac{RT_0}{\mu}}$	4.19×10^5 [cm s $^{-1}$]
時間	$t_0 = x_0/c_{\text{iso},0}$	16.7 [s]
圧力	$p_0 = \rho_0 c_{\text{iso},0}^2$	5.27×10^4 [erg cm $^{-3}$]
重力加速度の大きさ	$g_0 = c_{\text{iso},0}^2/x_0$	2.51×10^4 [cm s $^{-2}$]
磁束密度の大きさ	$B_0 = \sqrt{4\pi\rho_0 c_{\text{iso},0}}$	813 [G]
熱伝導率	$\kappa_0 = x_0\rho_0 c_{\text{iso},0}^3/T_0$	2.81×10^{13} [cm g s $^{-3}$ K $^{-1}$]
運動学的粘性係数	$\nu_0 = x_0 c_{\text{iso},0}$	2.93×10^{12} [cm 2 s $^{-1}$]
エネルギー変化率	$\Lambda_0 = \Gamma_0 = p_0 x_0^2 c_{\text{iso},0}$	1.08×10^{24} [erg s $^{-1}$]

すると、方程式 (2.1)-(2.5) は以下のような無次元の方程式となる。

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t_*} + \nabla_* \cdot (\rho_* \mathbf{v}_*) = 0 \quad (2.1^*)$$

$$\frac{\partial(\rho v_{i*})}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_{j*}} \left(\rho v_{i*} v_{j*} + \delta_{ij} \left(p_* + \frac{B_*^2}{2} \right) - B_{i*} B_{j*} + \Pi_{ij*} \right) = \rho_* g_{i*} \quad (2.2^*)$$

$$\frac{\partial E_*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_{i*}} \left((E_* + p_*) v_{i*} - \frac{B_{i*}}{4\pi} \mathbf{v}_* \cdot \mathbf{B}_* + v_{j*} \Pi_{ij*} - \kappa_* \frac{\partial T_*}{\partial x_{i*}} \right) = \rho_* \mathbf{g}_* \cdot \mathbf{v}_* - \Lambda_* + \Gamma_* \quad (2.3^*)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*} - \nabla_* \times (\mathbf{v}_* \times \mathbf{B}_*) = 0 \quad (2.4^*)$$

$$p_* = \rho_* T_* \quad (2.5^*)$$

ここで、

$$E_* = \frac{p_*}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho_* v_*^2 + \frac{B_*^2}{2} \quad (2.6^*)$$

$$\Pi_{ij*} = \rho_* \nu_* \left(\frac{\partial v_{i*}}{\partial x_{j*}} + \frac{\partial v_{j*}}{\partial x_{i*}} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_{i*}}{\partial x_{i*}} \right) \quad (2.7^*)$$

である。

式 (2.1)-(2.5) と (2.1*)-(2.5*) を見比べると、規格化した方程式の方が簡略化されており、見通しが良いことが分かる。実際のシミュレーションでは、この (2.1*)-(2.5*) 式を用いて計算している。以下では、方程式を掲載する場合、特に断りがない限り*マークがなくとも規格化した後の物理量を表すものとする。

セクション 2.2.1 で省略した $\Lambda, \Gamma, \mathbf{g}$ の具体形は

$$\Lambda = \frac{dF}{dy} \quad (2.8)$$

$$F = \begin{cases} F_{\text{sun}} \left[-\tanh\left(\frac{\log_{10}\rho - \log_{10}\rho_{\text{ph}} - 1}{0.5}\right) + 1 \right] & (\log_{10}\rho \geq \log_{10}\rho_{\text{ph}} - 0.5) \\ 0 & (\log_{10}\rho < \log_{10}\rho_{\text{ph}} - 0.5) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\Gamma = \begin{cases} 2 \left(\frac{F_{\text{sun}}}{w_h} \frac{w_h - (y + d_{cv})}{w_h} \right) & (y + d_{cv} \leq w_h) \\ 0 & (y + d_{cv} > w_h) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{g}(y) = -\frac{g_0}{2} \left[\tanh\left(\frac{y_g - y}{w_g}\right) + 1 \right] \mathbf{e}_y \quad (2.11)$$

と与えられる。ここで定数係数の値は以下で与えられる。

表 2.2 定数一覧

記号	値	規格化した値
F_{sun}	$9.83 \times 10^9 \text{ [erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}]$	0.44
ρ_{ph}	$3.00 \times 10^{-7} \text{ [g cm}^{-3}]$	1.00
d_{cv}	4200[km]	60.0
w_h	420[km]	6.00
g_0	$2.51 \times 10^4 \text{ [cm s}^{-2}]$	1.00
y_g	350 [km]	5.00
w_g	35[km]	0.50

冷却の式 (2.8)(2.9) については、密度が十分高いところ（光球より十分下）では輻射フラックスがほぼ 0 になり、光球では輻射フラックスが太陽と同程度になるというのを再現するためにこの関数を採用した。なお、彩層では光球ほど輻射がさかんではないので、密度が光球密度よりも十分小さいところでは冷却の効果を 0 にしてある。

加熱の式 (2.10) については、系全体のエネルギーがおおよそ維持されるように、上部で失う熱量と下部で入ってくる熱量を同程度にするため、この関数を採用した。

重力加速度の式 (2.11) は、 y が十分小さいところ（対流層の奥深く）では重力加速度が $-g_0$ になり、 y が大きいところ（光球より上）では重力加速度が 0 になるという特徴を持つ。これは、上部境界での数値不安定性を避けるためにこの関数を採用した。なお、光球付近 ($y = 0 \sim 0+$ スケールハイト) のところでは重力加速度はほぼ $-g_0$ であり、このような関数を仮定しても今注目している光球付近のダイナミクスに大きな影響はない。

2.3 初期条件

本研究では、モデル1（熱対流が起こらない）およびモデル2（熱対流が起こる）と、異なる2つの設定でシミュレーションを行う。まずは、両設定に共通な初期条件を述べた後、個別の設定に特有な初期条件を述べる。

2.3.1 共通の初期条件

まず温度、質量密度、圧力、速度の初期条件について述べる。基本となる物理量を以下の表の通りに選ぶ。

表 2.3 初期の温度、密度、速度を決定するためのパラメータ

記号	意味	値	規格化した値
ρ_{ph}	$y = 0$ における質量密度	$3.00 \times 10^{-7} \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$	1.00
T_{ph}	光球温度	5,500 [K]	1.00
d_{cv}	対流層の深さ	$4.2 \times 10^8 \text{ [cm]}$	60
γ	比熱比	3/2	3/2

圧力に関しては、圧力勾配力と重力のつり合いから初期分布を求める。温度は、光球 $y \geq 0$ においては一定値 T_{ph} とし、対流層 $y < 0$ においてはポリトロピック指数 m のポリトロブ関係式

$$p \propto \rho^{1 + \frac{1}{m}} \quad (2.12)$$

を仮定することによって温度分布を与える。ポリトロピック指数 m の値は、以下の手順で決める。対流が発生するためには、シュバルツシルト条件より

$$f\left(1 + \frac{1}{m}\right) > f(\gamma), \quad \left(f(x) = \frac{x-1}{x}\right) \quad (2.13)$$

が成立する必要がある。そこで、 $f(1 + 1/m)$ が $f(\gamma)$ よりわずかに大きいとして、その差を δ とおく。この δ の値をまず先に決めてしまい、この値をもとにポリトロピック指数を決定することにする。つまり

$$m = \frac{1}{\delta + \frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \quad (2.14)$$

である。ここで、モデル1（熱対流が起こらない）では $\delta = 0$ 、モデル2（熱対流が起こる）では $\delta = 10^{-6}$ とした。

圧力、温度の初期関数が求まれば、理想気体の状態方程式から密度の分布関数を求めることができる。

各物理量の初期関数を与えるため、さらに以下の量を定義しておく。これらは先ほど与えた物理量を用いて定義される。

表 2.4 初期の分布関数を与えるための定数

記号	意味	定義式
H_{ph}	光球のスケールハイト	$\frac{T_{ph}}{g}$
T_r	計算領域最下部の温度	$T_{ph} \left(1 + \frac{d_{cv}}{H_{ph}(m+1)}\right)$
H_r	計算領域最下部のスケールハイト	$\frac{T_r}{g}$
ρ_r	計算領域最下部の質量密度	$\rho_{ph} / \left(1 - \frac{d_{cv}}{H_r(m+1)}\right)^m$

このとき、各物理量の初期関数は以下の通りに表せる。

$$T(y) = \begin{cases} T_{ph} & (y \geq 0) \\ T_r \left(1 - \frac{y+d_{cv}}{H_r(m+1)}\right) & (y < 0) \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{\rho(y)}{T_r} & (y \geq 0) \\ \rho_r \left(1 - \frac{y+d_{cv}}{H_r(m+1)}\right)^m & (y < 0) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$p(y) = \begin{cases} \int_0^y \rho(y')g(y')dy' & (y \geq 0) \\ \rho_r T_r \left(1 - \frac{y+d_{cv}}{H_r(m+1)}\right)^{m+1} & (y < 0) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{v}(y) = \begin{cases} 0 & (y \geq 0) \\ -10^{-3} \sqrt{T(y)} \mathbf{e}_y \sim 10^{-3} \sqrt{T(y)} \mathbf{e}_y & (y < 0) \end{cases} \quad (2.18)$$

初速度の値についてはセルごとにランダムとし、その振幅は各セルの高度での音速スケールの1,000分の1程度とした。これは、対流を引き起こす種として必要な設定である。

磁場については、磁束管を特徴付けるパラメータを以下のように選ぶ。

表 2.5 磁場に関するパラメータ

記号	意味	値	規格化した値
r_{tb}	磁束管の半径	1.05×10^8 [cm]	15.0
x_{tb}	磁束管が発生する座標	0.00[cm]	0.00
y_{tb}	磁束管が発生する座標	-2.10×10^8 [cm]	-30.0
α	磁束管のねじれ度	2.28×10^{-8} [cm ⁻¹]	0.16
B_{tb}	磁束管の磁束密度	2000[G]	2.45
B_{bg}	背景磁場の磁束密度	後述	後述

このとき、背景磁場による磁束密度は

$$\mathbf{B}_{\text{bg}} = B_{\text{bg}} \mathbf{e}_y \quad (2.19)$$

と表せる。ここで、 B_{bg} の値は計算ごとに変わるが、0G, 10G, 100G, 200G, 300G, 400G, 500G の 7 パターンを計算する。また、磁束管による磁束密度は

$$\mathbf{B}_{\text{tb}}(x, y) = \begin{cases} \nabla \times \left(\frac{B_{\text{tb}}}{\alpha} j_0(\alpha r) \mathbf{e}_z \right) & (y \leq r_{\text{tb}}) \\ 0 & (r > r_{\text{tb}}) \end{cases} \quad (2.20)$$

ここで、 $j_0(x)$ は第一種ベッセル関数である。また、 r は磁束管が生成する位置中心からの距離で

$$r = \sqrt{(x - x_{\text{tb}})^2 + (y - y_{\text{tb}})^2} \quad (2.21)$$

という式で表される。このとき、磁束管の計算領域面に垂直な方向の磁束量は $5.62 \times 10^{18} \text{Mx}$ である。なお、磁束管の式 (2.20) は Force-Free 磁場と呼ばれるもので、これは Vandas et al.(2003)[17] を参考にした。Force-Free 磁場とは、磁束管の磁場による磁気圧勾配力と磁気張力が釣り合うな磁場のことで、初期状態では周囲にローレンツ力を及ぼさず、ガスの流れに影響を与えにくい。

熱伝導率 κ や粘性係数 ν は、まず先にプラントル数 Pr 、レイノルズ数 Re を与えた後、その値を元に算出する。本シミュレーションで用いたプラントル数、レイノルズ数の値は以下の通りである。

表 2.6 プラントル数とレイノルズ数

記号	意味	値
Pr	プラントル数	1.00
Re	レイノルズ数	1,000

このとき、粘性率は

$$\nu = \frac{v_c H_r}{Re} \quad (2.22)$$

と与えられる。ここで v_c は平均的な対流速度であり、先ほどポリトロピック指数 m を求めるときに用いた δ の値を用いて

$$v_c = \sqrt{\frac{\delta g_0 H_r}{8}} \quad (2.23)$$

と表せる。また、熱伝導率は

$$\kappa = \frac{\nu}{Pr} \quad (2.24)$$

と与えられる。

2.3.2 モデル 1 (熱対流が起こらない) における設定

対流が起こらない場合、磁束管を持ち上げる要因は浮力である。浮力を発生させるために、(Takasao et al 2015[14]) を参考にして、磁束管の出現とともに磁束管が占める領域の密度を抜いた。元々の密度を ρ_0 として、密度を減らした後の密度を ρ とすると

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{p_{\text{mag}}}{p} \right) \quad (2.25)$$

という式で密度を抜き、浮力を発生させた。ここで p_{mag} は磁気圧である。

また、対流を発生させないようにするため、冷却・加熱の効果をゼロ ($\Lambda = \Gamma = 0$) とした。

2.3.3 モデル 2 (熱対流が起こる) における設定

対流を含むシミュレーションでは、磁束管を持ち上げる主因は浮力ではなく対流の上昇流である。したがってシミュレーション開始時にすぐ磁束管を入れるのではなく、ある程度対流が定常的になってから磁束管を挿入する必要がある。対流が定常的になったかどうかは、運動エネルギーの変化がほぼ一定になっているかどうかで判断する。図 2.3 は磁場を含まない対流のシミュレーションにおける、流体の全運動エネルギーの時間発展である。この図で言えば、シミュレーション開始後 300min ほど経ったところなら対流が定常になったと判断してよいだろう。本シミュレーションでは図 2.3 における時刻 300min のところで磁束管を挿入することにする。

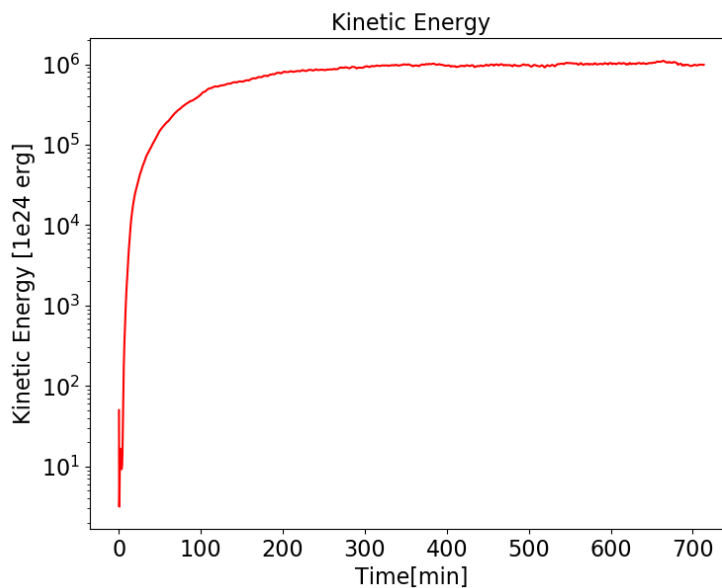


図 2.3 対流による運動エネルギーの時間発展

2.4 境界条件

2.4.1 x 軸方向の境界条件

x 軸方向に関しては、周期的境界条件を課した。すなわち、任意の物理量 $X(x, y, t)$ に対し、

$$X(x_{\min}, y, t) = X(x_{\max}, y, t) \quad (2.26)$$

が成立するように定めた。ここで $x_{\min} = -7000\text{km}$, $x_{\max} = +7000\text{km}$ である。

2.4.2 y 軸方向の境界条件

y 軸方向の境界条件は、ゴーストセルを用いて説明する。コンピュータで方程式を解くときは物理量を離散化する必要があるが、計算領域最下部のラベルを l 、計算領域最上部のラベルを u とする。ラベル l のセルの下に、ゴーストセル $l-1, l-2$ を容易し、同様にラベル u の上にゴーストセル $u+1, u+2$ を容易する。ゴーストセルを上下2つずつ用意する理由は、使用する流体計算コードが空間二次精度であることに由来する。

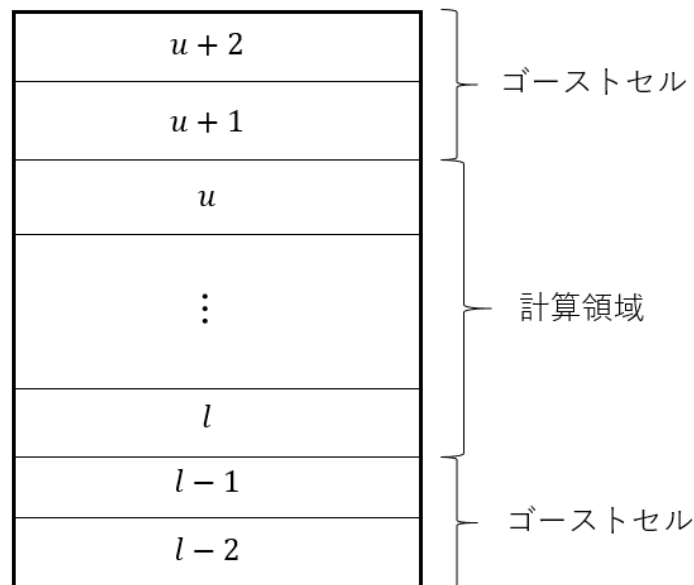


図 2.4 y 軸方向のゴーストセル

まずゴーストセルの圧力に関して述べる。下側の圧力は、圧力勾配力と重力のつり合いの式から決まる圧力分布を外挿することによって決定する。つまり

$$p_{l-j} = p_l + \rho_j g_0 dy \quad (2.27)$$

として p_{l-1}, p_{l-2} を定める。上側の圧力は自由端条件で、 $p_u = p_{u+1} = p_{u+2}$ である。

次に密度の境界条件を述べる。下側の密度は、式

$$\rho_{l-j} = \frac{p_{l-j}}{T_r \left(1 - \frac{(y_{l-j} - d_{cv})}{H_r(m+1)} \right)} \quad (2.28)$$

によって定める。上側の密度は自由端条件で $\rho_u = \rho_{u+1} = \rho_{u+2}$ である。

次に速度の境界条件を述べる。 x 方向の速度 v_x については上下ともに自由端条件である。 y 方向の速度 v_y に関しては、上下で少し設定が異なる。下側ゴーストセルの y 速度は常に $v_y = 0$ となっている。上側は、基本的には自由端条件をとっているが、 v_y の符号が負 (下向き) かつ、その値が光球における音速の 10 分の 1 より大きい場合は $v_y = 0$ にしている。これは数値的な不安定性を取り除くための処置である。

最後に、磁場の境界条件について述べる。 x 方向の磁場 B_x は上下ともにゴーストセルでは 0 である。 y 軸方向の磁場 B_y は上下ともに自由端条件をとっている。

第3章

結果

前章でも述べた通り、本研究では熱対流の有無という観点でモデルを分け、2種類のシミュレーションを実施した。本章ではその結果を述べる。

3.1 モデル1（熱対流が起こらない）の結果

まず、対流を発生させずに浮力による磁束管浮上をシミュレーションした。背景磁場の値は0G, 10G, 100G, 200G, 300G, 400G, 500Gの7パターンを試した。まず、背景磁場0Gおよび500Gの場合におけるシミュレーション結果を図示したあと、背景磁場ごとの磁束量増加率の違いについて述べる。

3.1.1 背景磁場0Gの場合

以下は背景磁場 $B_{bg} = 0G$ のシミュレーションの様子である。磁束密度の絶対値およびガスの速度をカラーマップで表示している。時刻は、磁束管を挿入してからの経過時間を表す。なお、1枚目の図は磁束管を挿入する直前の図である。ここで、磁束管の磁束密度は2,000Gである。

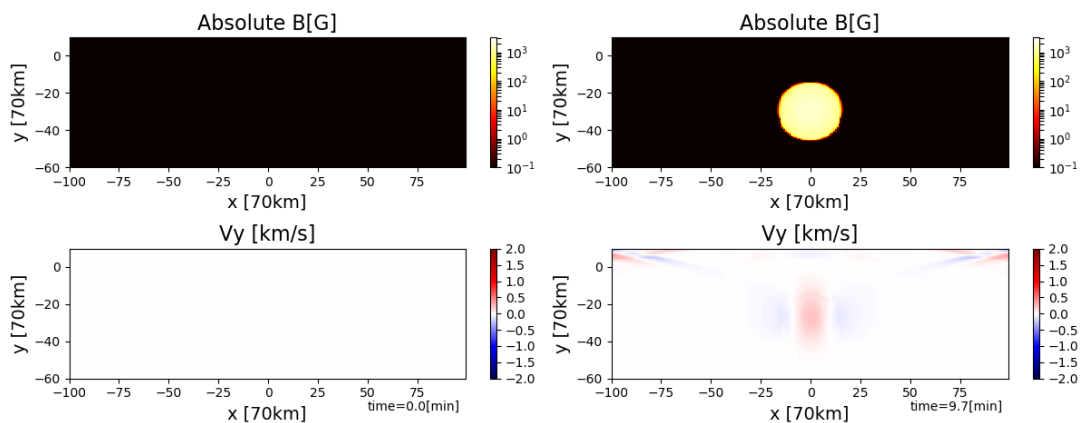


図 3.1 time=0min

図 3.2 time=9.7min

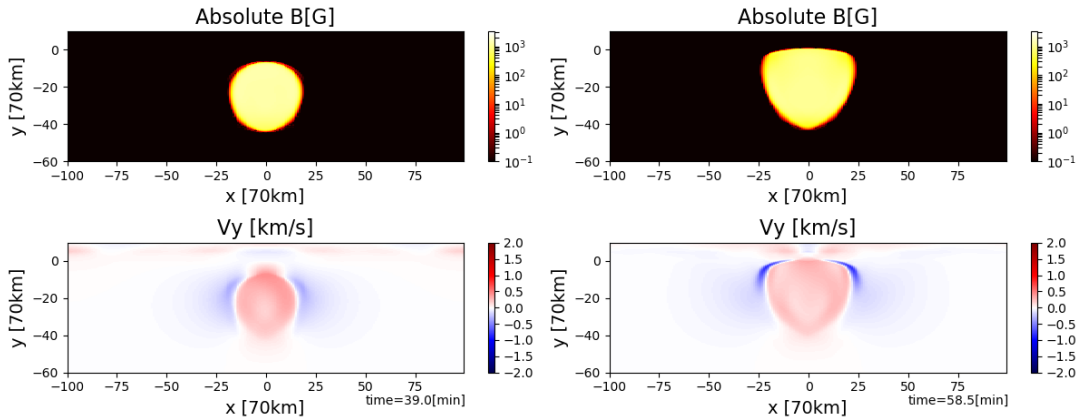


図 3.3 time=39.0min

図 3.4 time=58.5min

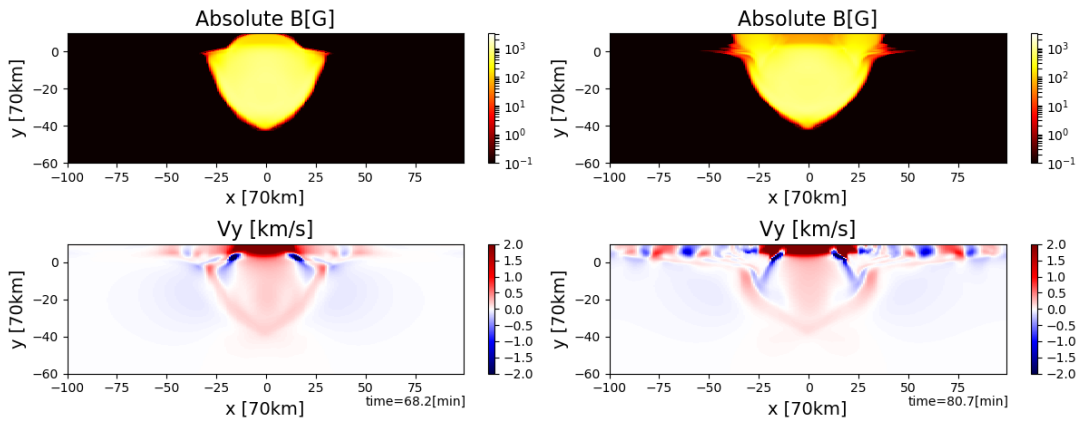


図 3.5 time=68.2min

図 3.6 time=80.7min

このように、磁束管が次第に横に膨らみつつ浮上し、最終的に磁束管が光球へ到達した。磁束管が出現してから光球へ飛び出すまでの時間は約 60min であった。磁束管が光球をとびだしたとき、磁場の強さがやや減少している。これは、Cheung et al.(2010)[4] が導出した関係式

$$\frac{B}{\sqrt{\rho}} = \text{const} \quad (3.1)$$

を用いることにより説明可能である。ここで B は磁束管の磁束密度、 ρ は磁束管がある位置でのガス密度である。磁束管が登場した位置と光球とでは密度差が 20 倍程度あるので、最初 2,000G だった磁束管は光球付近で 440G 程度になる。

3.1.2 背景磁場 500G の場合

背景磁場が 500G のときのシミュレーション結果を以下に示す。磁束管の磁束密度は先ほどと同様、2,000G である。

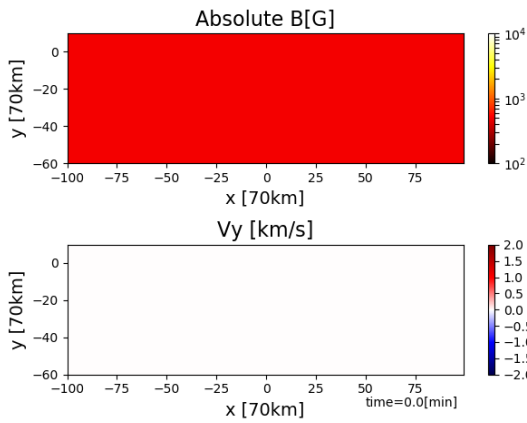


図 3.7 time=0min

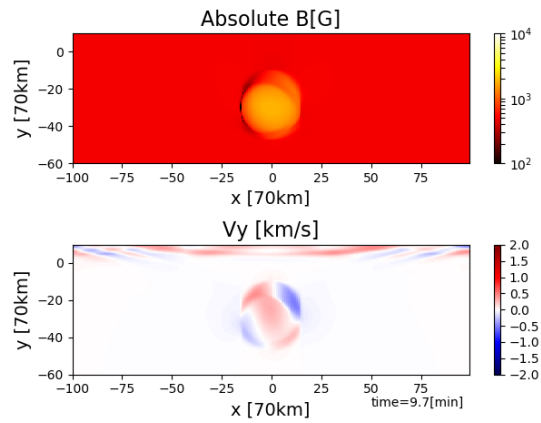


図 3.8 time=9.7min

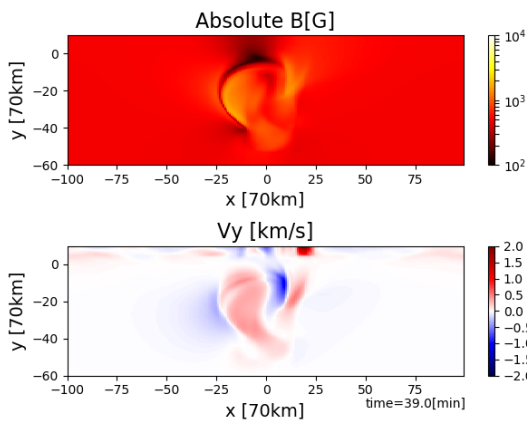


図 3.9 time=39.0min

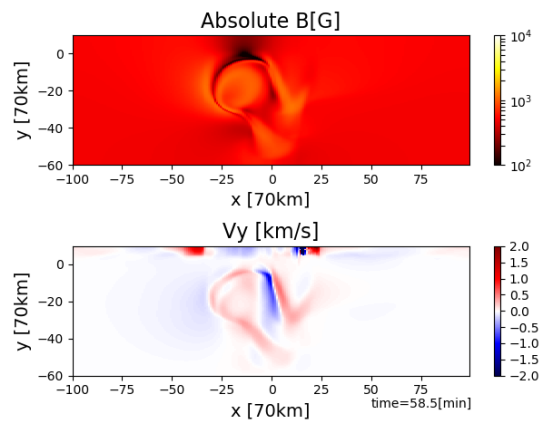


図 3.10 time=58.5min

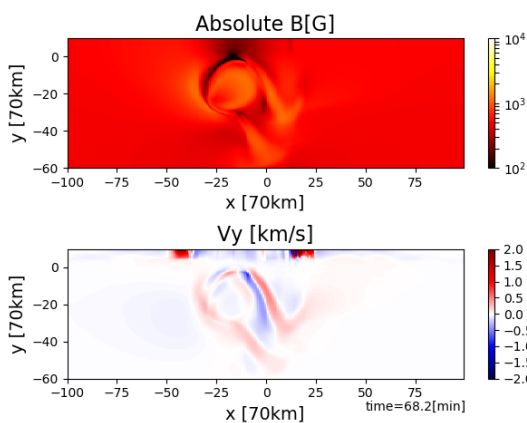


図 3.11 time=68.2min

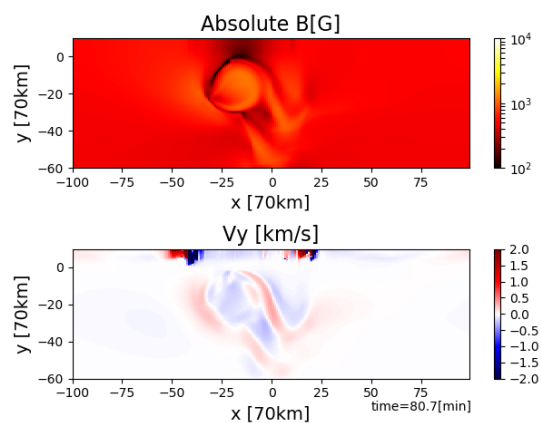


図 3.12 time=80.7min

背景磁場が 500G のときは、背景磁場が存在しないときに比べて磁束管が勢いよく浮上しなく

なっている。時刻 60min くらいのときに磁束管の上端は光球に触れるが、光球面への磁場の大規模な侵入は確認できなかった。また、磁束管は浮上とともに左側へ移動している。これは、磁束管の磁力線の向きは断面方向から見ると反時計回りであるため、左側は背景磁場と打ち消し合って磁場が弱くなり、左右の磁束密度の差による磁気圧勾配力が生じるためである (図 3.13)。

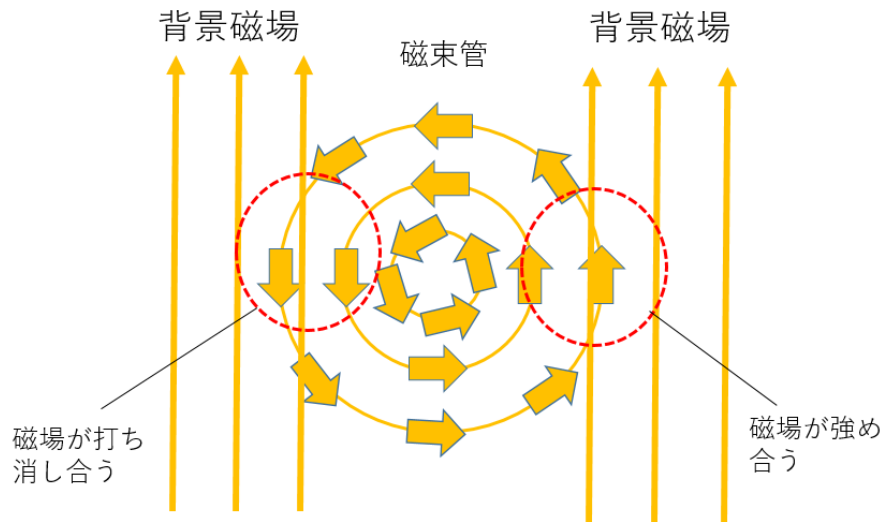


図 3.13 磁場の強さに差が出る様子

3.1.3 背景磁場の強さと磁束量増加率の関係

磁束管が光球に到達したとき (時刻 63min 以降)、光球の位置における磁束量増加率がどうなるかを調べる。磁束量増加率は以下の式により求める。

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} |B_y(x, y_0)| dx \quad (3.2)$$

ここで、 $y_0 = 36.75\text{km}$, $x_1 = +7000\text{km}$, $x_2 = -7000\text{km}$ である。測定する地点を座標 $y = 36.75\text{km}$ の位置にした理由は、対流層と光球の境界 $y = 0$ だと対流によるゆらぎが大きく、そこより 0.5 スケールハイト程度高い位置のほうが安定して磁束を計算できるからである。

各背景磁場ごとの磁束量増加率の時間変化は以下の通りである。

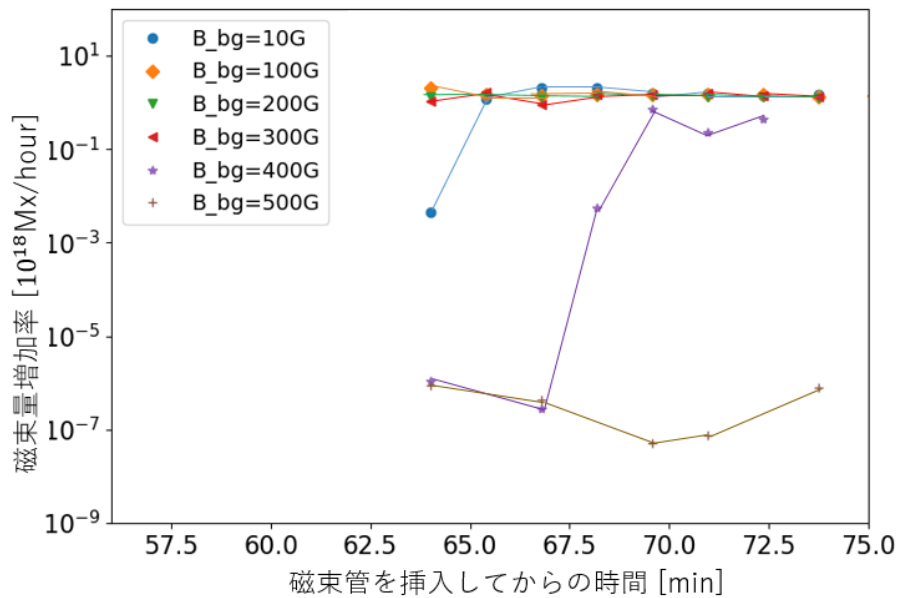


図 3.14 磁束量増加率の時間変化。横軸は磁束管を挿入してからの時間を表し、縦軸は光球 $y = 36.75\text{km}$ で測った磁束量増加率を表す。どの背景磁場を用いたモデルでも、おおむね時刻 63min に磁束管が光球に達したため、その時刻から磁束量増加率を計算している。また、ある程度磁束管が光球を飛び出すと、Alfvén Speed の増大に伴いシミュレーションの時間刻みが非常に小さくなるため、計算が困難になる。その時刻がおおよそ 74min であるため、この時刻で測定を打ち切った。

図 3.14 を見ると、背景磁場の大きさが 300G 以下の場合では、磁束量増加率に大きな影響を与えないことが分かった。このとき、磁束量増加率はおおよそ 10^{18}Mx/hour である。今、磁束量が 10^{18}Mx 程度の磁束管を与えているので、図 1.4 において太陽黒点の 95% が含まれる領域内に今考えている磁束管が含まれていることを確認できた。

一方、背景磁場の強さが 400G 以上になると、磁束量増加率に有意に影響を与えた。背景磁場が 400G のときは時刻によって磁束量増加率は大きく変動したが、全体的には背景磁場が弱いときに比べて低下した。時刻によって磁束量増加率が大きく変動した原因はまだ特定できていないが、今回は平均的な磁束量増加率の変化についてのみ興味があるため、時間依存性については今後の研究の課題としたい。背景磁場が 500G のときは、背景磁場が小さいときに比べて磁束量増加率が 6 桁から 7 桁小さくなっている。

次に、背景磁場の強さを横軸にし、時刻 63.0min から時刻 74.0min まで磁束量増加率の時間平均を縦軸にプロットした。

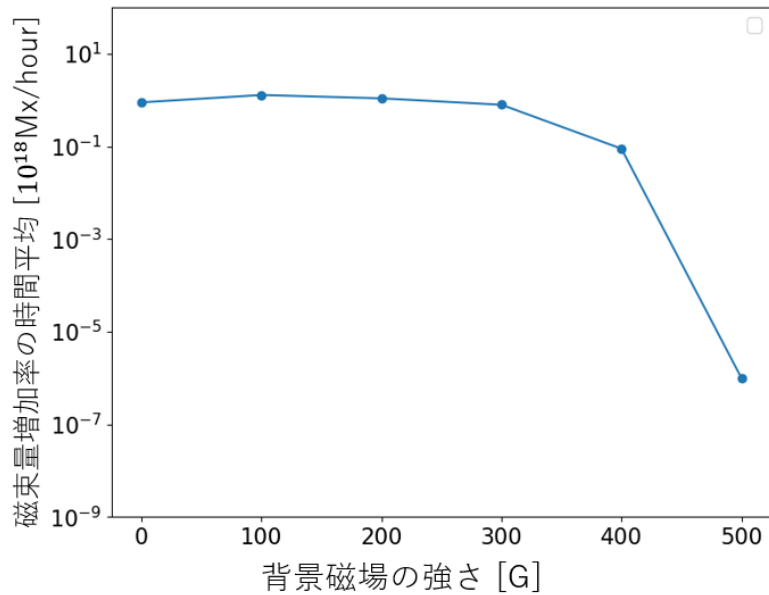


図 3.15 背景磁場の強さと磁束量増加率の時間平均

図 3.5 を見ると、やはり背景磁場 400G 程度から磁束量増加率が低下し始めていることが分かる。

3.2 モデル 2（熱対流が起こる）の結果

対流を含むシミュレーションでは、諸所の困難により、まだ十分な結果を出せていない。現在、背景磁場が 0G のときのみシミュレーションが実施できているので、本節ではこの結果を述べる。

3.2.1 背景磁場 0G の場合

背景磁場の大きさを 0G とし、対流が発生する条件下で磁束密度 2000G の磁束管を入れた。2.3.3 節でも述べたが、対流による磁束管浮上を再現する場合は、対流が十分発達してから磁束管を挿入する必要がある。磁束管を挿入した時刻を基準として、そこからの経過時間を time で表す。磁束管浮上の様子は以下の通りであった。モデル 1 のときと同様、磁場ベクトルの絶対値と y 軸方向の速度をカラーマップで表示している。

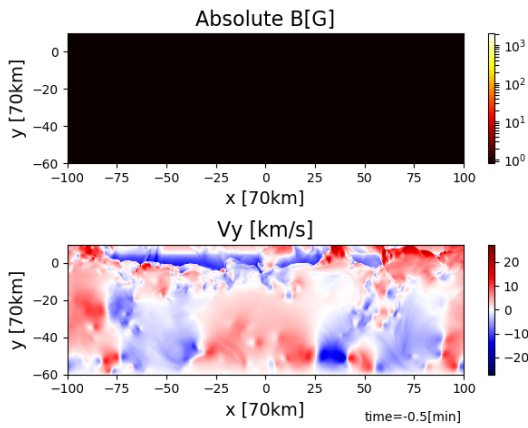


図 3.16 time=0min

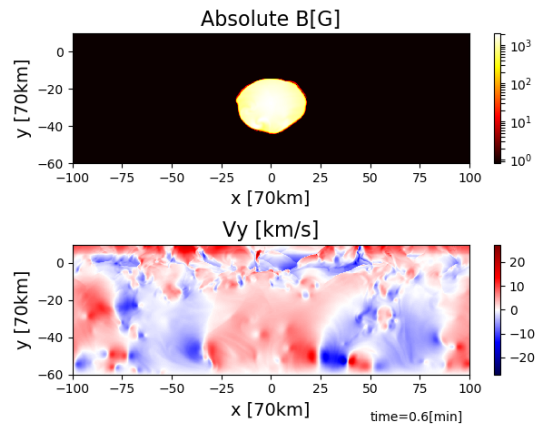


図 3.17 time=0.6min

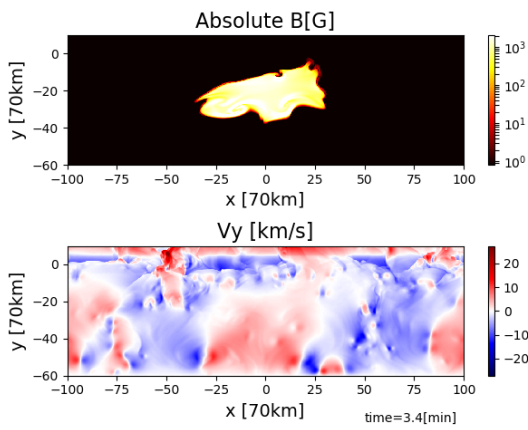


図 3.18 time=3.4min

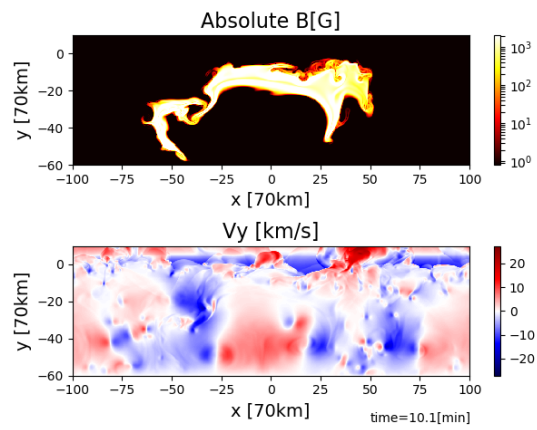


図 3.19 time=10.1min

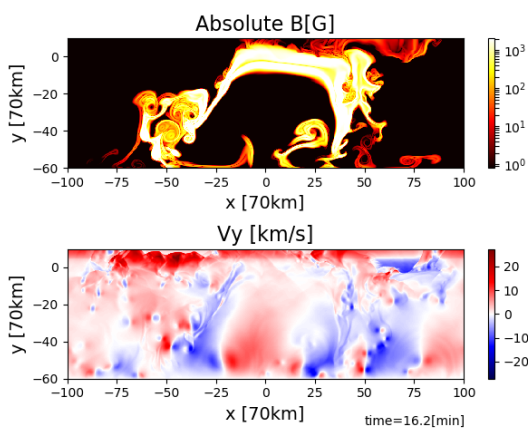


図 3.20 time=16.2min

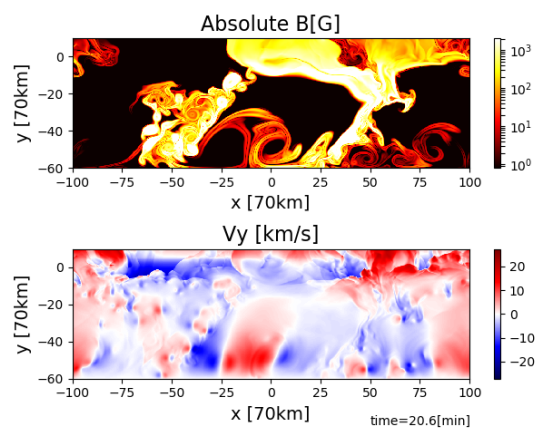


図 3.21 time=20.6min

図 3.16 から 3.21 を見ると分かるように、対流の効果によって磁束管が大きく乱れた。磁束管

の全てが浮上するわけではないが、磁束管の一部が光球まで上昇しているのが分かる。前節において磁束量浮上率を測った位置 $y = 36.75\text{km}$ で磁束量増加率を計算してみたところ、おおよそ 10^{18}Mx/hour であった。つまり、背景磁場が存在しない場合には、対流の有無によって磁束量増加率が大きく変化しないことが分かった。

3.2.2 対流計算に伴う困難

現在、モデル 2 のシミュレーションでは、背景磁場を含めた結果までは出せていない。これには次のような困難があるためである。2次元におけるシミュレーションでは、乱流の性質が3次元とは異なるため、磁場が対流によって増幅され過ぎてしまう。例えば、図 3.22 は、定常的な対流に背景磁場 10G を入れ（磁束管は入れていない）、時間が 100min 経った後の磁場ベクトルの絶対値および y 軸方向の流体速度の分布である。最初 10G だった磁場は、数千 G 程度にまで増幅してしまっている。あまりにも増幅する磁場が大きいと、対流の様子にも影響を与えてしまい、「背景磁場の差による磁束管浮上の違い」を比較することができなくなってしまう。

磁場の増幅のされすぎを防ぐためには、3次元の計算が必要になる。3次元の計算を実施するためには大きな計算資源が必要であり、これは卒業研究の段階では難しいため、今後の課題としたい。

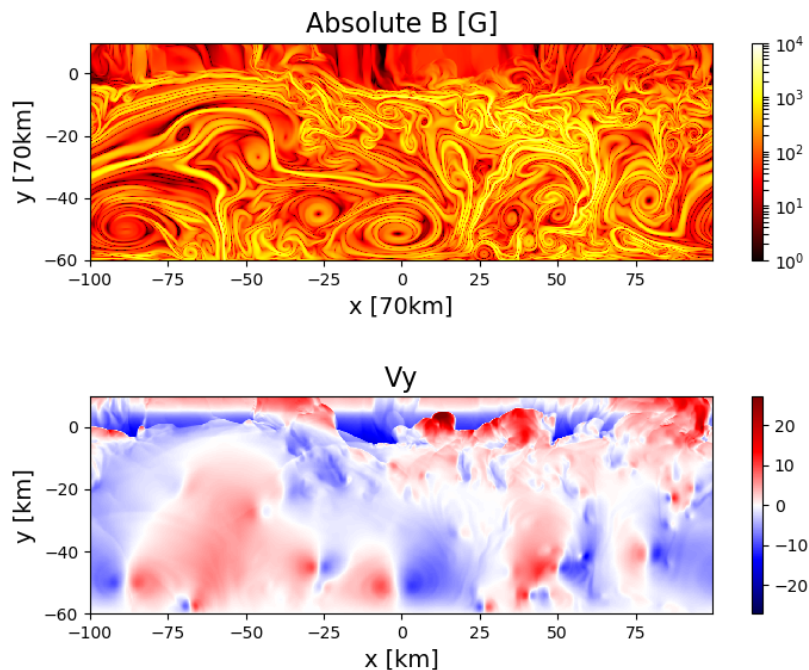


図 3.22 背景磁場 10G を入れてから 100min 後の磁場分布と速度分布の様子

第4章

議論・展望

4.1 モデル1（熱対流が起こらない）のシミュレーションの考察

4.1.1 なぜ背景磁場 400G から影響が見え始めたか

浮力によって磁束管が持ち上がる場合、背景磁場が 400G を超えると磁束量増加率が大きく下がり始めた。どうしてこの値で変化が見られたのか、磁気圧とガス圧の比を調べることで考察してみる。図 4.1 に初期条件（磁束管が生じる直前）における磁気圧とガス圧の比を示す。

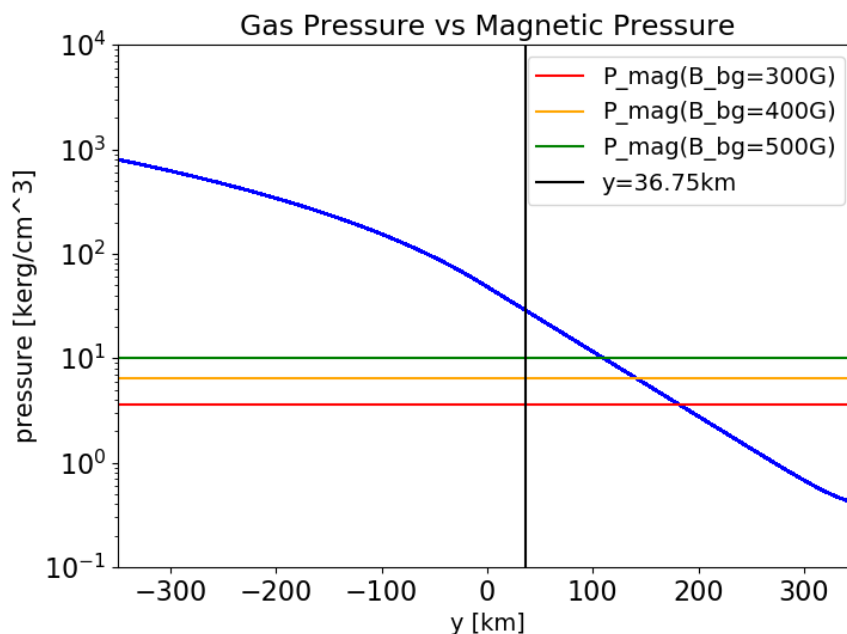


図 4.1 光球付近における磁気圧とガス圧の比。青色の曲線が初期条件における圧力分布で、直線が背景磁場による磁気圧の大きさを表す。

磁束量増加率を測った地点 $y = 36.75$ km におけるガス圧は約 30 kerg cm^{-3} である。一方、背景

磁場 300G,400G,500G における磁気圧は、それぞれ約 3.5kerg cm^{-3} , 6.5kerg cm^{-3} , 10kerg cm^{-3} である。ガス圧に対する比で表すと、それぞれ 12%, 22%, 33% である。つまり、背景磁場による磁気圧が光球におけるガス圧の 5 分の 1 を超えてくると、磁束管浮上に対する背景磁場による寄与が見えてくるということになる。しかし、なぜガス圧の 5 分の 1 という値がターニングポイントになるのかについては、物理的な解釈ができなかった。

4.1.2 磁束管の浮上がおさえられる理由

次に、磁束管の上昇がおさえられる理由について考察してみる。

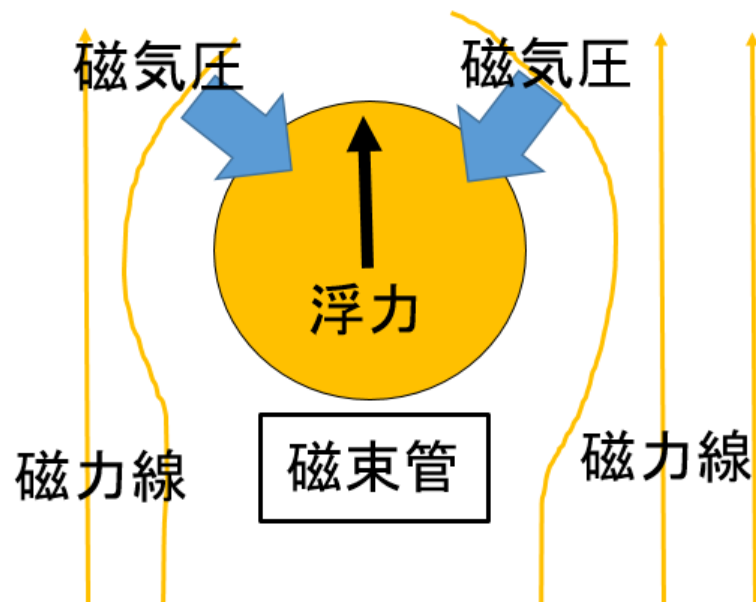


図 4.2 磁束管の浮上が磁気張力によっておさえられる様子

図 4.2 のように、 y 軸方向に一様な背景磁場がある中で、磁力管が浮力によって上昇する状況を考えてみる。このとき、磁束管の浮上に伴い周囲の磁力線が歪められる。磁力線が歪められると、磁力線がおよぼす磁気圧勾配力が、鉛直方向の成分をもつことになる。このため、磁束管は上から磁気圧によっておさえられることになり、浮上しにくくなる。

なお、背景磁場の磁力線が歪められると、磁束管の下側からも磁気圧勾配力が生じると考えられる。しかし、磁束管の下側は上側に比べガス圧が大きく、相対的な磁気圧の大きさは小さい。したがって背景磁場を入れた場合は、上側から加わる力（磁気圧勾配力）が大きくなり、下側から受ける力（ほぼガス圧の勾配力）はほとんど変わらないため、結局磁束管は上からおさえられることになる。

本シミュレーションでは磁束管の直径を一定 (2,100km) にして計算したが、磁力線の歪みの程度は磁束管のサイズに依存する可能性がある。どのようなサイズの磁束管を入れると、どのくらい

磁力線が歪むのかについてはまだ検証できていないが、今後の課題としたい。

4.2 まとめ・今後の課題

本研究では、太陽型星の背景磁場が磁束管の浮上に与える影響を調べるため、磁気流体シミュレーションを実施した。現在、熱対流を含まないモデルでの計算に成功し、背景磁場が 400G を超える場合には磁束管の浮上が妨げられることを発見した。

現実の太陽型星では熱対流が生じている。より現実に沿ったシミュレーションをするために、熱対流を含むシミュレーションを実施予定である。現在、二次元モデルにおいて熱対流を含むシミュレーションをしようとしたが、2次元特有の乱流の性質により磁場が増幅されすぎてしまうという問題に直面した。この問題を解決するために、3次元の熱対流モデルを構築することが今後の課題である。

参考文献

- [1] Martin Asplund, Nicolas Grevesse, A. Jacques Sauval, and Pat Scott. The Chemical Composition of the Sun. *ARAA*, 47(1):481–522, September 2009.
- [2] Svetlana V. Berdyugina. Starspots: A Key to the Stellar Dynamo. *Living Reviews in Solar Physics*, 2(1):8, December 2005.
- [3] Axel Brandenburg and Kandaswamy Subramanian. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *physrep*, 417(1-4):1–209, October 2005.
- [4] M.C.M. Cheung, M. Rempel, A.M. Title, and M. Schüssler. Simulation of the Formation of a Solar Active Region. *APJ*, 720(1):233–244, September 2010.
- [5] K. Namekata, K. Shibata, H. Maehara, Y. Notsu, D. Nogami, S. Toriumi, J. Davenport, S. Hawley, and B. Morris. Lifetimes and emergence/decay rates of star spots on solar-type stars estimated by Kepler data in comparison with those of sunspots. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #235*, volume 235 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 148.05, January 2020.
- [6] A. A. Norton, E. H. Jones, M. G. Linton, and J. E. Leake. Magnetic Flux Emergence and Decay Rates for Preceder and Follower Sunspots Observed with HMI. *APJ*, 842(1):3, June 2017.
- [7] Yuta Notsu, Takuya Shibayama, Hiroyuki Maehara, Shota Notsu, Takashi Nagao, Satoshi Honda, Takako T. Ishii, Daisaku Nogami, and Kazunari Shibata. Superflares on Solar-type Stars Observed with Kepler II. Photometric Variability of Superflare-generating Stars: A Signature of Stellar Rotation and Starspots. *ApJ*, 771(2):127, July 2013.
- [8] Kenichi Otsuji, Reizaburo Kitai, Kiyoshi Ichimoto, and Kazunari Shibata. Statistical Study on the Nature of Solar-Flux Emergence. *PASJ*, 63:1047–1057, October 2011.
- [9] E. N. Parker. Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I. The general nature of the sunspots. *ApJ*, 230:905–923, June 1979.
- [10] Eugene N. Parker. The Formation of Sunspots from the Solar Toroidal Field. *ApJ*, 121:491, March 1955.
- [11] Kazunari Shibata, Hiroaki Isobe, Andrew Hillier, Arnab Rai Choudhuri, Hiroyuki Maehara, Takako T. Ishii, Takuya Shibayama, Shota Notsu, Yuta Notsu, Takashi Nagao,

- Satoshi Honda, and Daisaku Nogami. Can Superflares Occur on Our Sun? *PASJ*, 65:49, June 2013.
- [12] James M. Stone, Kengo Tomida, Christopher J. White, and Kyle G. Felker. The Athena++ Adaptive Mesh Refinement Framework: Design and Magnetohydrodynamic Solvers. *ApJS*, 249(1):4, July 2020.
- [13] Klaus G. Strassmeier. Starspots. *AAPR*, 17(3):251–308, September 2009.
- [14] Shinsuke Takasao, Yuhong Fan, Mark C. M. Cheung, and Kazunari Shibata. Numerical Study on the Emergence of Kinked Flux Tube for Understanding of Possible Origin of ensuremathdelta-spot Regions. *ApJ*, 813(2):112, November 2015.
- [15] Shinsuke Takasao, Ikuyuki Mitsuishi, Takuma Shimura, Atsushi Yoshida, Masanobu Kunitomo, Yuki A. Tanaka, and Daisuke Ishihara. Investigation of Coronal Properties of X-Ray Bright G-dwarf Stars Based on the Solar Surface Magnetic Field-Corona Relationship. *ApJ*, 901(1):70, September 2020.
- [16] Eleuterio F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009.
- [17] M. Vandas and E. P. Romashets. A force-free field with constant alpha in an oblate cylinder: A generalization of the Lundquist solution. *AAP*, 398:801–807, February 2003.
- [18] Cornelis Zwaan. Elements and patterns in the solar magnetic field. *ARAA*, 25:83–111, 11 2003.

謝辞

まず最初に、本研究における共同研究者であり、大阪大学宇宙進化グループ助教の高棹真介氏に感謝を申し上げます。研究について右も左も分からなかった私がここまでこれたのも、高棹氏の丁寧かつ的確な助言があったからである。ここに、厚く御礼申し上げます。また、時折私の研究を気にかけてくれ、議論してくださった大阪大学宇宙進化グループの教員の方々、先輩方、同級生にも感謝を申し上げます。最後に、私を陰から支えていただき、私の研究活動を応援していただいた家族にも感謝する次第である。

付録 A

Riemann Solver

本研究では数値計算の手法として、有限体積法の一つである Riemann Solver という手法を用いた。本節では Riemann Solver の概要と、その近似計算法である HLL について述べる。

A.1 Riemann 問題

Riemann Solver の説明の前に、Riemann 問題という数学の問題について考えてみる。Riemann 問題とは、ある関数 u の初期条件が不連続な 2 値の区分的定数関数であったとき、関数 u はどう振る舞うかという問題である。

実際に定式化してみる。座標 x と時間 t に依存する関数 $u(x, t)$ が、方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

を満たすとする。 $f(u)$ は u の関数で、物理では物理量 u のフラックスに対応する。この関数 $u(x, t)$ の初期条件が

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & (x < 0) \\ u_R & (x \geq 0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

であったとき、解 $u(x, t)$ はどのように表されるだろうか。問題を見やすくするため、式 (A.1) を変形し

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.3})$$

としてみよう。まずは簡単な場合として、 $\frac{\partial f}{\partial u}$ が定数 a であった場合を考える。この場合、式 (A.3) は単なる移流方程式であるから、解析解は簡単に得られ

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & (x - at < 0) \\ u_R & (x - at \geq 0) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

である。 $x - t$ 平面で解を図示すると以下の図になる。

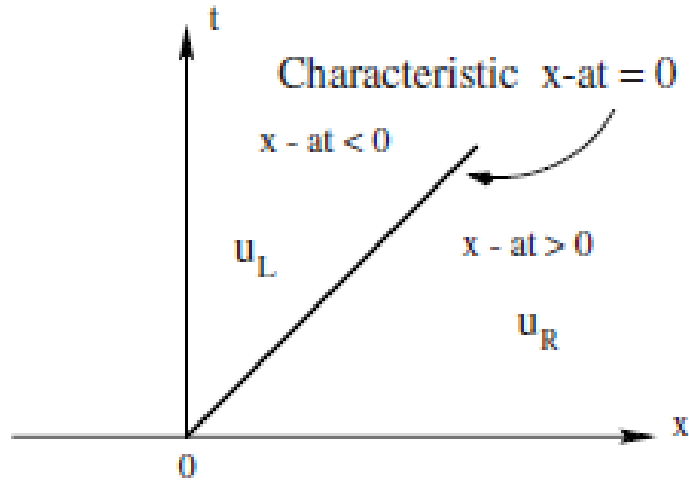


図 A.1 解の概念図 ([16] から引用)

ここで、 $x-t$ 平面内で $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}$ という式を満たす線を方程式 (A.3) の「特性曲線」と呼ぶ。図 A.1 では、直線 $x-at = x_0$ (x_0 は任意定数) が特性曲線である。

次に、 $\frac{\partial f}{\partial u}$ が u の関数 $\lambda(u)$ である場合を考える。このとき式 (A.3) は線形な偏微分方程式とはならないため、問題は複雑になる。まず、この方程式の特性曲線を探ってみよう。特性曲線が存在し、

$$x = \phi(t) \tag{A.5}$$

であったと仮定する。すると、特性曲線の定義より

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} = \lambda(u) \tag{A.6}$$

が成立する。特性曲線に沿った u の値 $u(\phi(t), t)$ の値の変化を調べてみると

$$\frac{du(\phi(t), t)}{dt} = \frac{\partial u(\phi(t), t)}{\partial x} \frac{d\phi(t)}{dt} + \frac{\partial u(\phi(t), t)}{\partial t} \tag{A.7}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{A.8}$$

$$= 0 \tag{A.9}$$

となる。すなわち u の値は特性曲線に沿って不変であることが分かる。 u が特性曲線上で一定であるから、特性曲線の座標 t における傾き $\frac{d\phi}{dt} = \lambda(u)$ も一定となる。つまり、特性曲線は直線となる。このとき、特性曲線は式

$$x = \lambda(u(x_0, 0))t + x_0 \tag{A.10}$$

で表すことができる。

初期条件が式 (A.2) のような 2 値の区分的定数関数である場合、 $\lambda(u(x_0, 0))$ も出発点 x_0 によって異なる 2 つの値をもつと考えられる。すると特性曲線は図 A.2 のように 2 つの異なる傾きをもつ直線になり、特性曲線同士が交わる点が存在し得ることが分かる。これらの点では関数 $u(x, t)$ の値は一意に定まらなくなる。

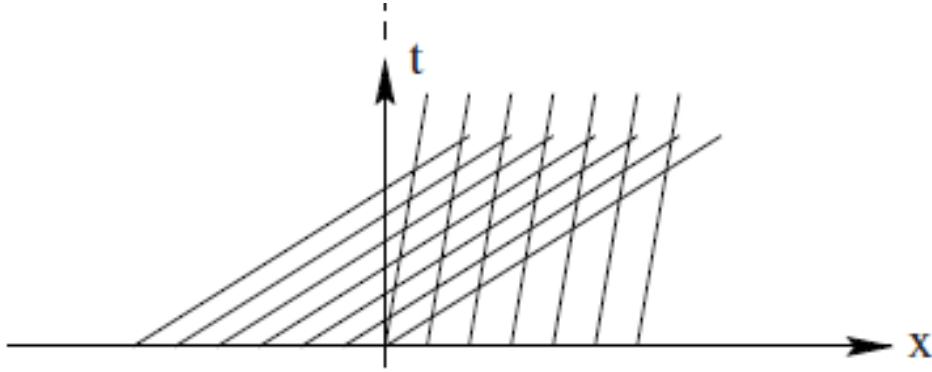


図 A.2 特性曲線の傾きが異なる様子 ([16] から引用)

特性曲線が交わる点が存在するというのは、ある点 (x, t) に対し、複数の u の値が存在し得るということであり、通常の意味での方程式 (A.3) の解とみなすことはできない。そこで、「弱解」と呼ばれる概念を用いて方程式 (A.3) の解について議論する。方程式 (A.3) を区間 $[x_L, x_R] \times [t_1, t_2]$ で積分することにより

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x, t_2) dx - \int_{x_L}^{x_R} u(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_R, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_L, t)) dt = 0 \quad (\text{A.11})$$

が得られる。関数 $u(x, t)$ が、全ての x_R, x_L, t_2, t_1 に対して式 (A.11) を満たすのであれば、 $u(x, t)$ を広い意味での方程式 (A.3) の解とみなすことにする。このとき、 $u(x, t)$ を方程式 (A.3) の「弱解」と呼ぶ。

弱解の不連続な部分の性質を調べてみよう。まず、 $\lambda(u_L) > \lambda(u_R)$ の場合を考える。このときは特性曲線が交わる点が存在するが、その交点を結んでいくと図 A.3 のようにある傾き S をもつ直線が得られる。これは関数 $u(x, t)$ の不連続面を表し、物理では衝撃波に対応する。

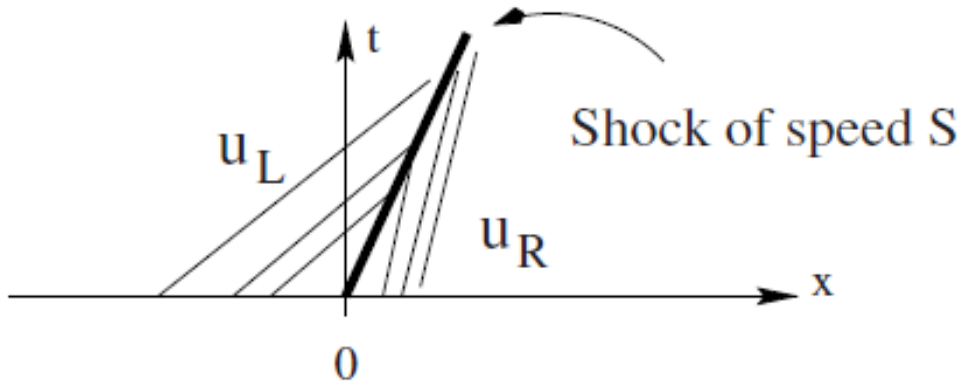


図 A.3 速度 S で伝わる衝撃波 ([16] から引用)

衝撃波の速度 S の値については、詳しい導出は ([16] の p.70 付近) に譲るが不連続面付近にて保存則 (A.11) を適用することにより

$$S = \frac{f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t))}{u(x_L, t) - u(x_R, t)} \quad (\text{A.12})$$

で与えられる。ここで、 x_L, x_R は衝撃波面に対する左極限および右極限の座標を表す。このとき、方程式 (A.3) の弱解は

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & (x - St < 0) \\ u_R & (x - St \geq 0) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

で与えられる。

次に、 $\lambda(u_L) < \lambda(u_R)$ の場合を考える。この場合、エントロピー増大則より衝撃波は起こりえないが、図 A.4 のような自己相似解が存在する。このような解を膨張波と呼ぶ。

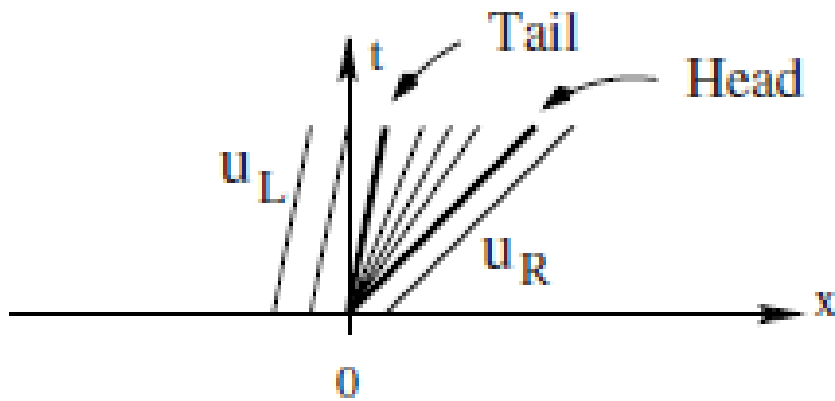


図 A.4 膨張波が生じる様子 ([16] から引用)

この場合、弱解は

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & (x < u_L t) \\ \frac{x}{t} & (u_L t \leq x < u_R t) \\ u_R & (x \geq u_R t) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

と表すことができる。(導出は [16] の p.73 以降を参照)

本節では Riemann Solver の解説の土台として、Riemann 問題について解説した。 $\frac{\partial f}{\partial u}$ が定数の時は比較的簡単に解が求まるが、 $\frac{\partial f}{\partial u}$ が u に依存する場合は衝撃波または膨張波が生じ、解を求めるためにやや複雑な議論を要した。いずれにせよ重要なことは、方程式が (A.3) のような形で表される場合、Riemann 問題には解析解があるという点である。

A.2 Riemann Solver

本節では流体方程式を数値的に解く手法である、Riemann Solver について述べる。
流体方程式系を保存形式で記述すると、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.15})$$

である。ただし簡単のため 1 次元の問題にしてある。ここで

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p) u \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

である。流体方程式は非常に複雑な非線形偏微分方程式系であり、解析解は知られていない。そこで、解法が既知の問題に帰着させてから解く必要がある。ここで考え出されたアイデアが「物理量を区分的定数関数で近似し、隣り合うセルの間で Riemann 問題を解き、各セルの時間発展を求める」というものである。図 A.5 はアルゴリズムの概念図である。

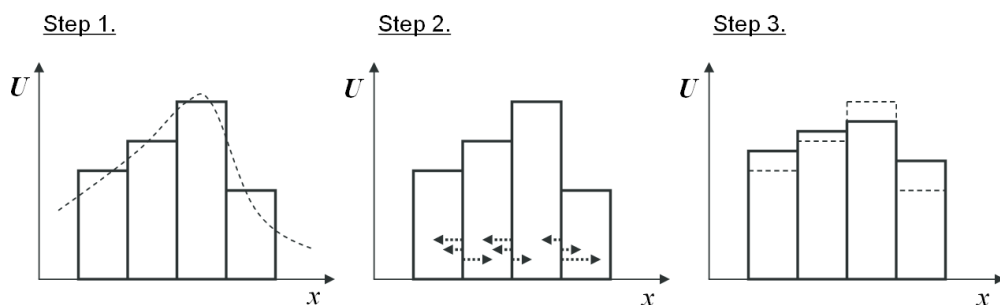


図 A.5 Riemann Solver のアルゴリズム。Step1 では、本来は連続値をとる物理量をセルごとに一定の値の値をもつ離散的な値に変換する様子を表す。Step2 はセル間で Riemann 問題を解く様子を表す。Step3 は Riemann 問題を解いた結果として各セルの物理量が更新される様子を表す。

(<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html> より引用)

A.2.1 ベクトル値関数の Riemann 問題の解き方

Riemann Solver の流れを述べる前に、ベクトル値関数の Riemann 問題の解き方について述べる。まず、ヤコビ行列 $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ を導入して (A.15) を書き直すと

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.17})$$

である。ここで、行列 \mathbf{A} の固有値は $u - a$, u , $u + a$ になる。ここで a は音速であり、

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (\text{A.18})$$

である。もし磁場の効果を含めた方程式を解くならば、ベクトルの成分が増えるだけ固有値も増えることになり、Alfven Speed を u に足し引きした値が追加される。

式 (A.17) の下で Riemann 問題を厳密に解く場合、まず行列 \mathbf{A} を対角化し、パラメータ \mathbf{U} は \mathbf{A} を対角化する行列 \mathbf{P} を用いて $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$ として基底を変換し

$$\frac{\partial \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \frac{\partial \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.19})$$

とした式を用いればよい。すると、対角化した行列は対角成分しかもっていないので、前節で述べたようなスカラー値関数の Riemann 問題に帰着させることができる。

本節で述べた解法はベクトル値関数における Riemann 問題を厳密に解く方法であるが、これは数値計算コストが非常に大きいため、実用的にはヤコビ行列を必要としない近似リーマン解法がよく使われる。

A.2.2 Riemann Solver の流れ

それでは、Riemann Solver の流れについて述べる。まず式 (A.15) を時間に関して (空間の精度は $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}$ の reconstruction によって決まる) 1 次精度で差分化すると

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}) \quad (\text{A.20})$$

である。ここで \mathbf{U}_i^n は、座標 x_i を中心とするセルの、時刻 t^n における \mathbf{U} の値を表す。 Δx , Δt はそれぞれ空間、時間の刻み幅を表す。一般に方程式の差分をとるとき、空間偏微分に対して前進、後退、あるいは中心差分など、様々な差分の取り方が存在するが、どれでもよいというわけではなく、不連続面でも成り立つような差分をとらねばならない。式 (A.20) は $x - t$ 平面における領域 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ の保存則から得た差分式であり、不連続面でも成り立つ。

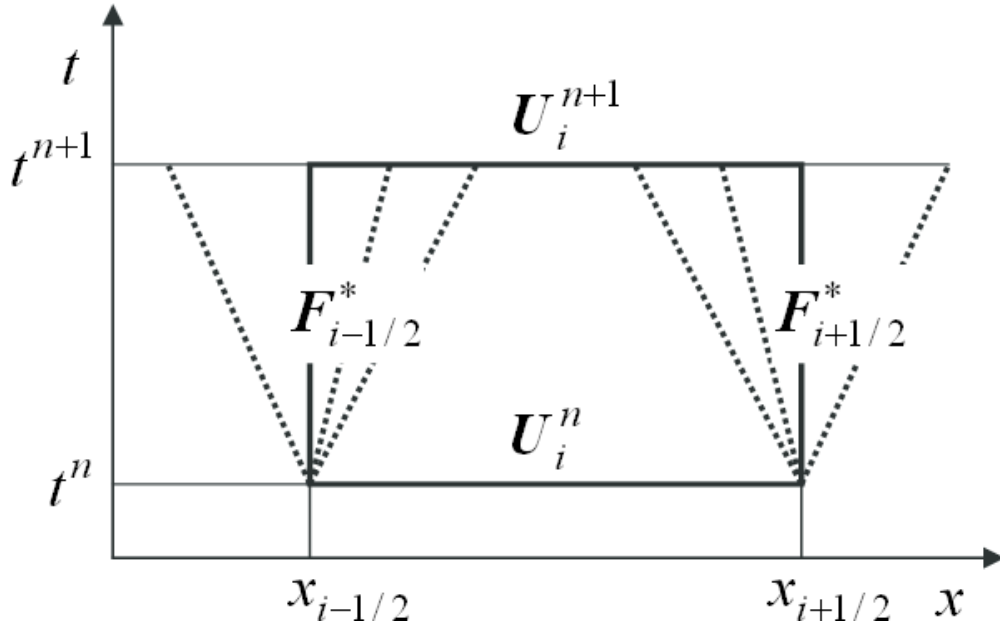


図 A.6 時空を差分化した様子

(<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html> より引用)

(A.20) において、まだ $F_{i\pm 1/2}$ は定義されていないが、これらはセル間で Riemann 問題を解くことで得られる。すなわち、初期条件

$$U(x, t^n) = \begin{cases} U_L & (x < x_{i+1/2}) \\ U_R & (x \geq x_{i+1/2}) \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

の下でリーマン問題を解き、時刻 $t^n < t < t^{n+1}$ および空間 $x_i < x < x_{i+1}$ における解 $U(x, t)$ を求め、この情報から $F_{i+1/2}$ を決定する。 $F_{i-1/2}$ の決定に関しても同様である。フラックスの情報 $F_{i\pm 1/2}$ が分かれば、パラメータ更新式 (A.20) を計算することができ、任意の時間まで U の値を計算できる。

Riemann Solver のフローの中には 2 つの任意性がある。まず一つは、時刻 t^n におけるパラメータ $U_i^n (i = 0, 1, 2, \dots)$ から、各セル間で計算する Riemann 問題の初期条件 U_L, U_R をどのように決めるかという任意性。二つ目は、Riemann 問題をどのように解くか、また Riemann 問題の解 $U(x, t)$ からフラックス $F_{i\pm 1/2}$ をどのように計算するかという任意性である。前者は cell reconstruction と呼ばれる過程で、最も単純には 1 次精度だと $U_L = U_i^n, U_R = U_{i+1}^n$ とすればよい。もっと高精度の reconstruction としては、Piecewise Linear Method (PLM)、Piecewise Parabolic Method (PPM) などがある。後者の任意性は、適用する Riemann Solver のスキームによって作法が異なってくる。代表的なスキームとしては、HLL, HLLC, Roe 法などがある。

A.3 HLL 法

HLL 法は、Harten, Lax, van Leer によって提案された近似リーマン解法の一つである。HLL 法を簡潔に説明すると、Riemann 問題を厳密に解くのではなく、傾きが最大または最小となる特性曲線のみを考え、その 2 つの特性曲線で挟まれた領域は単一の状態であると仮定し、近似的に Riemann 問題を解くというスキームである。

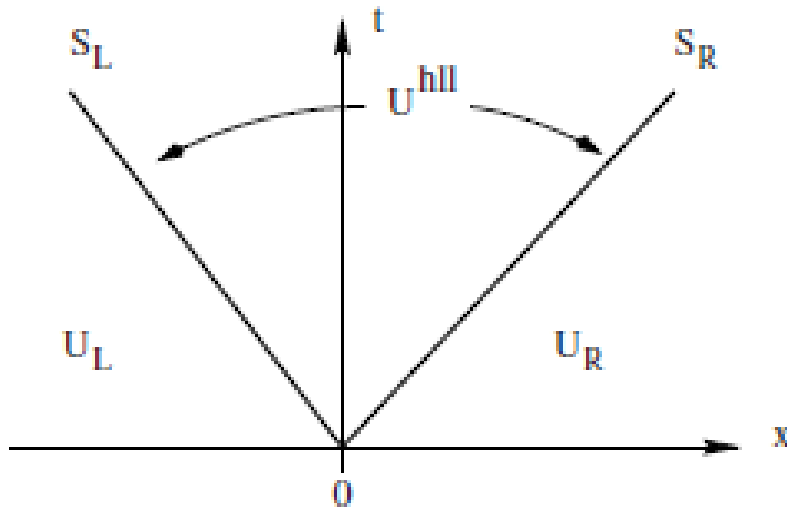


図 A.7 HLL 法の概要図
([16] より引用)

図 A.7 は HLL 法の概要図である。原点 O がセルとセルの境界を表し、その左右の状態がそれぞれ U_L, U_R であったとする。特性曲線の最も傾き大きいものを S_R 、最も傾き小さいものを S_L とする。パラメータが式 (A.16) で表されるようなものであった場合、特性曲線の傾きはヤコビアン A の固有値であるから、 $u - a, u, u + a$ の 3 つがあり得る。このとき、最大・最小の傾きをもつ特性曲線だけに注目し、 $S_R = u + a, S_L = u - a$ とする。傾き u の特性曲線については無視する。Riemann 問題を厳密に解く場合は、傾き S_R, S_L の特性曲線が衝撃波または膨張波を形成するのかということを見分けなければならないが、HLL 法ではそのような分別はしない。とにかく、最大の傾き S_R と最小の傾き S_L の特性曲線がなす領域だけに着目するのである。2 つの特性曲線で囲まれた領域では、パラメータ U は単一の状態 U_{HLL} をとると仮定する。 U_{HLL} の値の決め方は後述する。

パラメータ更新式 (A.20) を解く際、分かっているのはフラックス $F_{i\pm 1/2}$ の情報であった。ここからは、HLL 法を用いてフラックス $F_{i\pm 1/2}$ をどう決めるかについて述べる。 $F_{i\pm 1/2}$ の決定式は、特性曲線の傾き S_R, S_L が 0 より大きい小さいかで 3 パターンの場合分けが存在する。

$S_L < 0 \leq S_R$ のとき

S_R が正で、 S_L が負のとき、特性曲線の様子は以下の図のようになる。

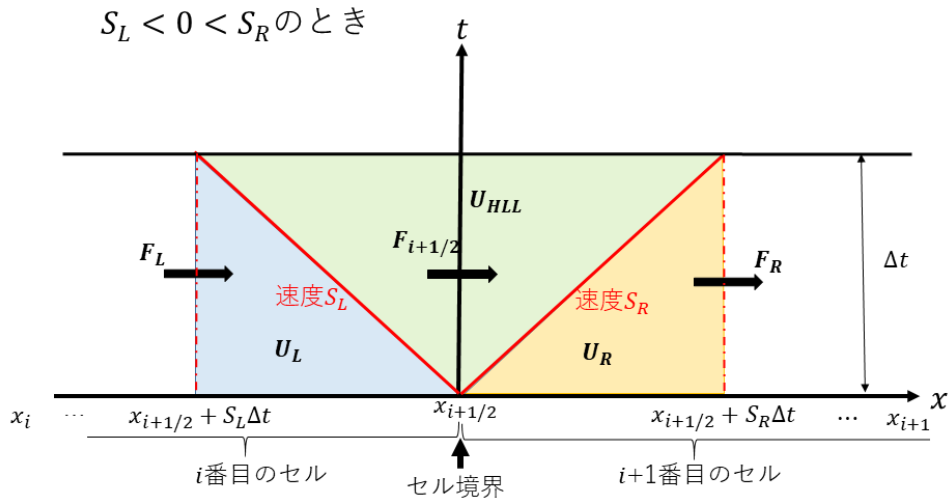


図 A.8 S_R, S_L の符号が異なる場合

図 A.8 は座標 x_i を中心とするセルと、座標 x_{i+1} を中心とするセルの境界付近を表している。座標 $x_{i+1/2}$ がセルの境界、つまり Riemann 問題を解く際の原点に対応する。傾き S_R, S_L の特性曲線は、時刻 Δt 後にはそれぞれ座標 $x_{i+1/2} + S_R\Delta t$, $x_{i+1/2} + S_L\Delta t$ に達している。ここで、時間の刻み幅 Δt は、特性曲線が空間の刻み幅 Δx を進む時間よりも十分小さめに設定されているとする。座標 $x_{i+1/2} + S_L\Delta t$, $x_{i+1/2}$, $x_{i+1/2} + S_R\Delta t$ におけるフラックスをそれぞれ F_L , $F_{i+1/2}$, F_R とする。この $F_{i+1/2}$ が決定したいフラックスである。 F_L , F_R の決め方については reconstruction の方法によっても異なるが、最も単純には $F_L = F(U_i^n)$, $F_R = F(U_{i+1}^n)$ としてやればよい。パラメータ U の値は

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L & (\frac{x}{t} < S_L) \\ U_{HLL} & (S_L \leq \frac{x}{t} < S_R) \\ U_R & (\frac{x}{t} \geq S_R) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

と、3つの値をとるとする。(A.22) は Riemann 問題を近似的に解いた結果とみなす。

U_{HLL} の値は、図 (A.8) の色がついた部分に保存則 (A.11) を適用することで得られる。保存則

より

$$\int_{x_{i+1/2}+S_L\Delta t}^{x_{i+1/2}+S_R\Delta t} \mathbf{U}(x, t^{n+1})dx - \int_{x_{i+1/2}+S_L\Delta t}^{x_{i+1/2}+S_R\Delta t} \mathbf{U}(x, t^n)dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_L dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_R dt = 0 \quad (\text{A.23})$$

が成立する。ここで、 t^n は Riemann 問題を解き始めた時刻で、 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ とする。(A.23) を整理すると

$$\mathbf{U}_{\text{HLL}}(S_R\Delta t - S_L\Delta t) - (\mathbf{U}_R S_R\Delta t - \mathbf{U}_L S_L\Delta t) + \mathbf{F}_R\Delta t - \mathbf{F}_L\Delta t = 0 \quad (\text{A.24})$$

である。これより

$$\mathbf{U}_{\text{HLL}} = \frac{\mathbf{U}_R S_R - \mathbf{U}_L S_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} \quad (\text{A.25})$$

となる。真ん中のフラックス $\mathbf{F}_{i+1/2}$ については、右半分もしくは左半分に保存則 (A.11) を適用することによって得られる。右半分の保存則より

$$\mathbf{U}_{\text{HLL}} S_R\Delta t - \mathbf{U}_R S_R\Delta t + \mathbf{F}_{i+1/2}\Delta t - \mathbf{F}_R\Delta t = 0 \quad (\text{A.26})$$

である。これより

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) + \mathbf{F}_L S_R - \mathbf{F}_R S_L}{S_R - S_L} \quad (\text{A.27})$$

が得られる。左半分に保存則を用いても全く同じ結果が得られる。

$S_L > 0$ または $S_R \leq 0$ のとき

2つの特性曲線の傾きはかならずしも0をはさむわけではない。最も大きい特性曲線の傾きが負になったり、最も小さい特性曲線の傾きが正になることもある。例えば、超音速流が右から左向きに流れているときは $S_R < 0$ になる。

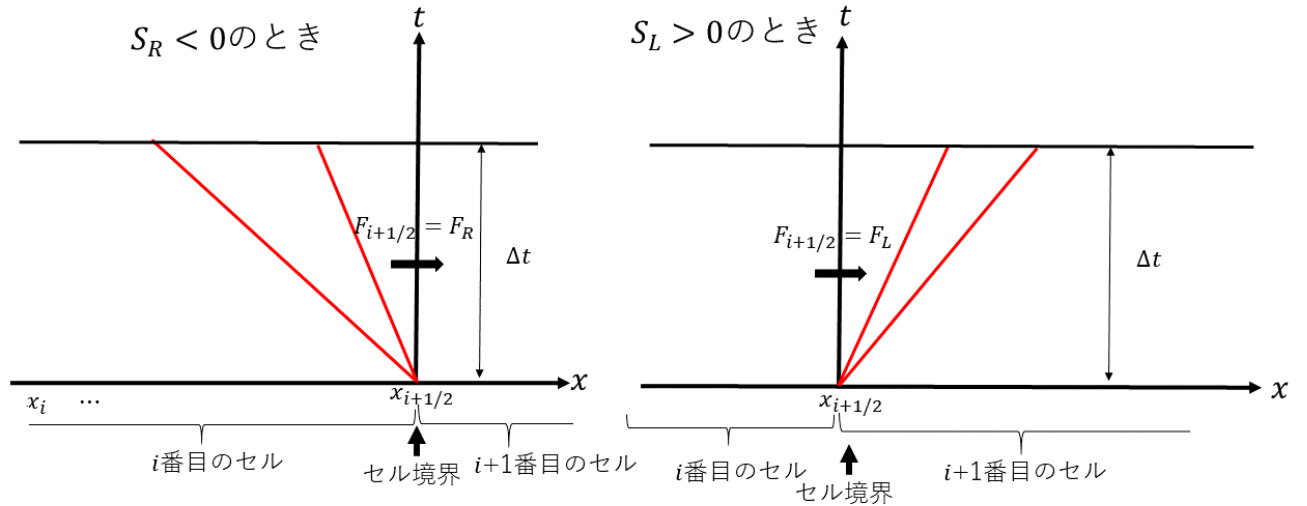


図 A.9 $S_R \leq 0$ または $S_L > 0$ の場合

この場合、わざわざ特性曲線で囲まれた領域について考える必要はなく、 F_L, F_R のうち、座標 $x_{i+1/2}$ に近いほうのフラックスを $F_{i+1/2}$ としてやればよい。先ほどの結果とまとめると

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} F_L & (0 < S_L) \\ \frac{S_L S_R (U_R - U_L) + F_L S_R - F_R S_L}{S_R - S_L} & (S_L \leq 0 < S_R) \\ F_R & (0 \geq S_R) \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

である。

$F_{i-1/2}$ の決定に関しても、同様の操作を行うことにより得られる。これにより、(A.20) で計算するために必要なパラメータが全て揃ったので、パラメータ U を更新することができる。

HLL はヤコビ行列の計算を必要としないので、計算に必要なコストが小さいという長所がある。また、1次元の問題では密度・圧力の正值性が理論的に保証されている。一方、HLL では密度の接触不連続面を考慮しないので、密度の不連続面は拡散的になってしまうという欠点がある。密度の接触不連続面を計算に取り入れたい場合は HLL の代わりに HLLC などが用いられる。